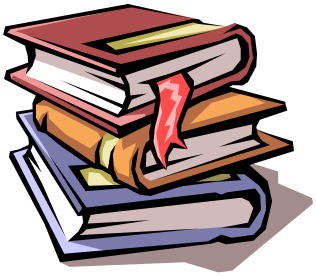
Tailieumontoan.com

Sưu tầm



TUYỂN TẬP ĐỀ THI
HỌC SINH GIỎI TOÁN LỚP 12

Tài liệu sưu tầm, ngày 24 tháng 8 năm 2020

ĐỀ HSG 12 TỈNH QUẢNG BÌNH

NĂM 2019

MÔN TOÁN

TIME: 180 PHÚT

Câu 1 *(2.0 điểm)*

a. Cho hàm số $y=\frac{1}{x}$ có đồ thị là đường cong (C) và điểm $I\left(-\frac{5}{6};\frac{5}{4}\right)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua I và cắt (C) tại hai điểm M, N sao cho I là trung điểm của MN.

b. Cho hàm số $y=x+\left|x^2-2x+m\right|$, với m là tham số. Tìm m để hàm số có cực đại.

Câu 2 *(2.0 điểm)*

a. Giải phương trình sau trên tập số thực $\mathbb{R}$:

$$x^3-7x^2+9x+12=(x-3)\left(x-2+5\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x-3}-1\right)$$

b. Cho sáu thẻ, mỗi thẻ ghi một trong các số của tập $E=\{1;2;3;4;6;8\}$ (*các thẻ khác nhau ghi các số khác nhau*). Rút ngẫu nhiên ba thẻ, tính xác suất để rút được ba thẻ ghi ba số là số đo ba cạnh của một tam giác có góc tù.

Câu 3 *(2.0 điểm).* Cho tích phân $I(t)=\int_0^t (x\sin x)^2\mathrm{d}x$.

a. Tính $I(t)$ khi $t=\pi$.

b. Chứng minh rằng $I(t)+I(-t)=0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Câu 4 *(3.0 điểm)* Cho khối tứ diện $SABC$ và hai điểm M,N lần lượt thuộc các cạnh SA,SB sao cho $\frac{SM}{MA}=\frac{1}{2},\frac{SN}{NB}=2$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm M,N và song song với đường thẳng SC.

a. Trong trường hợp $SABC$ là tứ diện đều cạnh a, xác định và tính theo a diện tích thiết diện của khối tứ diện $SABC$ với mặt phẳng (P).

b. Trong trường hợp bất kì, mặt phẳng (P) chia tứ diện $SABC$ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

Câu 5 *(1.0 điểm)* Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n>1$ ta luôn có:

$$\log_n(n+1)>\log_{n+1}(n+2)$$

HẾT

GIẢI CHI TIẾT ĐỀ HSG 12 TỈNH QUẢNG BÌNH

NĂM 2019

MÔN TOÁN

TIME: 180 PHÚT

Câu 1 *(2.0 điểm).*

a. Cho hàm số $y=\frac{1}{x}$ có đồ thị là đường cong (C) và điểm $I\left(-\frac{5}{6};\frac{5}{4}\right)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua I và cắt (C) tại hai điểm M,N sao cho I là trung điểm của MN.

Lời giải

Tác giả:Trần Thị Thúy; Fb: Thúy Minh, Huyen Nguyen

Cách 1:

+ Gọi d đi qua điểm $I\left(-\frac{5}{6};\frac{5}{4}\right)$ và có hệ số góc k có phương trình là:

$$y=k\left(x+\frac{5}{6}\right)+\frac{5}{4}\Leftrightarrow y=\frac{12kx+10k+15}{12}.$$

+ Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$$\frac{1}{x}=\frac{12kx+10k+15}{12}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ g(x)=12kx^2+(10k+15)x-12=0\end{cases}\quad(*)$$

+ Đường cong (C) cắt d tại hai điểm M,N khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}k\neq 0\\ \Delta>0\\ g(0)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k\neq 0\\ (10k+15)^2+4.12^2.k>0\\ -12\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k\neq 0\\ \left[\begin{array}{l}k>\frac{-219+84\sqrt{6}}{50}\\ k<\frac{-219-84\sqrt{6}}{50}\end{array}\right.\end{cases}\quad(1).$$

+ Với k thỏa mãn (1), gọi $x_1;\ x_2$ lần lượt là hoành độ của hai điểm M, N, với $x_1;\ x_2$ là hai nghiệm của phương trình $(*)$.

+ Theo định lý Vi-et ta có: $x_1+x_2=\dfrac{-5(2k+3)}{12k}$.

+ I là trung điểm của MN khi và chỉ khi:

$$x_1+x_2=2x_I \Leftrightarrow \frac{-5(2k+3)}{12k}=-\frac{5}{3} \Leftrightarrow 2k+3=4k \Leftrightarrow k=\frac{3}{2} \text{ (thỏa mãn } (1)\text{)}.$$

+ Với $k=\dfrac{3}{2}$ ta có phương trình đường thẳng d là: $3x-2y+5=0$.

Cách 2:

+ $M\left(m;\dfrac{1}{m}\right)\in(C)$, I là trung điểm của MN nên ta có:

$$N(2x_I-x_M;2y_I-y_M)=\left(\frac{-5}{3}-m;\frac{5}{2}-\frac{1}{m}\right)=\left(\frac{-5-3m}{3};\frac{5m-2}{2m}\right)$$

+ Vì $N\in(C)$ suy ra $\dfrac{5m-2}{2m}=\dfrac{3}{-5-3m} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0; m\neq \dfrac{-5}{3} \\ (5m-2)(-5-3m)=6m \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0; m\neq \dfrac{-5}{3} \\ 3m^2+5m-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=\dfrac{1}{3} \end{array}\right..$$

+ Với $m=-2$ ta có $M\left(-2;\dfrac{-1}{2}\right);N\left(\dfrac{1}{3};3\right)$.

+ Với $m=\dfrac{1}{3}$ ta có $M\left(\dfrac{1}{3};3\right);N\left(-2;\dfrac{-1}{2}\right)$.

+ Đường thẳng d đi qua hai điểm M, nhận $\overrightarrow{MN}=\left(\dfrac{7}{3};\dfrac{7}{2}\right)=\dfrac{7}{6}(2;3)$ làm vecto chỉ phương, hay nhận $\vec{n}=(3;-2)$ làm vecto pháp tuyến :

$$3(x+2)-2\left(y+\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow 3x-2y+5=0.$$

Vậy phương trình đường thẳng d cần tìm là: $3x-2y+5=0$.

b. Cho hàm số $y=x+\left|x^2-2x+m\right|$, với m là tham số. Tìm m để hàm số có cực đại.

Lời giải

Hàm số $y = x + \left|x^2 - 2x + m\right|$. TXĐ: $\mathbb{R}$.

<u>Trường hợp 1:</u> $m \geq 1 \Rightarrow x^2 - 2x + m \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

+ $y = x + \left|x^2 - 2x + m\right| = x^2 - x + m$, hàm số này có đồ thị là một Parabol nên chỉ có cực tiểu, suy ra $m \geq 1$ không thỏa mãn.

<u>Trường hợp 2:</u> $m < 1$

+ $y = x + \left|x^2 - 2x + m\right| = \begin{cases} x^2 - x + m & \text{khi } x \in \left(-\infty; 1 - \sqrt{1-m}\right] \cup \left[1 + \sqrt{1-m}; +\infty\right) \\ -x^2 + 3x - m & \text{khi } x \in \left(1 - \sqrt{1-m}; 1 + \sqrt{1-m}\right) \end{cases}$.

+ $y' = \begin{cases} 2x - 1 & \text{khi } x \in \left(-\infty; 1 - \sqrt{1-m}\right) \cup \left(1 + \sqrt{1-m}; +\infty\right) \\ -2x + 3 & \text{khi } x \in \left(1 - \sqrt{1-m}; 1 + \sqrt{1-m}\right) \end{cases}$.

+) $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Dễ thấy $1 + \sqrt{1-m} > \frac{1}{2}$ với mọi $m < 1$ và $1 - \sqrt{1-m} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow m < \frac{3}{4}$.

+) $-2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$. Dễ thấy $1 - \sqrt{1-m} < \frac{3}{2}$ với mọi $m < 1$ và $\frac{3}{2} < 1 + \sqrt{1-m} \Leftrightarrow m < \frac{3}{4}$.

+) Với $m < \frac{3}{4}$, ta có bảng xét dấu của y':

x	$-\infty$		$1 - \sqrt{1-m}$		$\frac{3}{2}$		$1 + \sqrt{1-m}$		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

Hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{3}{2}$.

+) Với $\frac{3}{4} < m < 1$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$1 - \sqrt{1-m}$		$1 + \sqrt{1-m}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$+$	

Hàm số không có cực đại.

Dễ thấy khi $m = \frac{3}{4}$ hàm số không có cực đại.

Vậy hàm số có cực đại với $m < \frac{3}{4}$.

Câu 2 *(2.0 điểm)*

a. Giải phương trình sau trên tập số thực $\mathbb{R}$:

$$x^3-7x^2+9x+12=(x-3)\left(x-2+5\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x-3}-1\right).$$

Lời giải

Tác giả: Đặng Mai Hương, Ngô Quốc Tuấn, FB: Đặng Mai Hương, Quốc Tuấn

Cách 1: $x^3-7x^2+9x+12=(x-3)\left(x-2+5\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x-3}-1\right)$ *(điều kiện* $x\ge 3$*)*

$$\Leftrightarrow (x-4)\left(x^2-3x-3\right)=(x-3)\left(x-2+5\sqrt{x-3}\right)\frac{x-4}{\sqrt{x-3}+1}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4=0 \\ x^2-3x-3=\dfrac{x^2-5x+6+5x.\sqrt{x-3}-15\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+1} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4(\text{Nhan}) \\ \left(x^2-8x+12\right)\sqrt{x-3}=9-2x\ (1) \end{array}\right..$$

Giải (1): $\left(x^2-8x+12\right)\sqrt{x-3}=9-2x$.

Đặt $t=\sqrt{x-3}\ge 0$.

Phương trình (1) trở thành: $t^5-2t^3+2t^2-3t-3=0\ (2)$.

(Phân tích phương trình (2) như sau: $VT=\left(t^2+at+b\right).\left(t^3+ct^2+dt+e\right)$. Đồng nhất hệ số).

$$(2):\left(t^2-t-1\right)\left(t^3+t^2+3\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2-t-1=0 \\ t^3+t^2+3=0\ (\text{vo nghiem do } t\ge 0) \end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}(\text{Nhan}) \\ t=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<0(\text{Loai}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{x-3}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow x=\frac{9+\sqrt{5}}{2}(\text{Nhan}).$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{4;\dfrac{9+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Cách 2: Điều kiện: $x\ge 3$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$(x-4)(x^2-3x-3)=\frac{x^2-5x+6+5(x-3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+1}(x-4)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=4\ (\text{Nhan}) \\ x^2-3x-3=\dfrac{x^2-5x+6+5(x-3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+1} \qquad (1)\end{array}\right.$$

Giải (1):

$$x^2-3x-3-\frac{x^2-5x+6+5(x-3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow(x^2-3x-3)(\sqrt{x-3}+1)-x^2+5x-6-5(x-3)\sqrt{x-3}=0$$

$$\Leftrightarrow 9-2x-(x^2-8x+12)\sqrt{x-3}=0$$

$$\Leftrightarrow -x^3+12x^2-46x+57+(x^2-8x+12)(x-4-\sqrt{x-3})=0$$

$$\Leftrightarrow -(x-3)(x^2-9x+19)+(x^2-8x+12)(x-4-\sqrt{x-3})=0$$

$$\Leftrightarrow -(x-3)(x-4-\sqrt{x-3})(x-4+\sqrt{x-3})+(x^2-8x+12)(x-4-\sqrt{x-3})=0$$

$$\Leftrightarrow (x-4-\sqrt{x-3})\left[-(x-3)(x-4+\sqrt{x-3})+(x^2-8x+12)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x-4-\sqrt{x-3})\left[(3-x)\sqrt{x-3}-x\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sqrt{x-3}=x-4 & (2)\\ (3-x)\sqrt{x-3}-x=0 & (3)\end{array}\right.$$

*Giải (2): $\sqrt{x-3}=x-4\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 4\\ x^2-9x+19=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 4\\ \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{9+\sqrt{5}}{2}\\ x=\dfrac{9-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{9+\sqrt{5}}{2}$.

*Giải (3):

$(3-x)\sqrt{x-3}-x=0\Leftrightarrow\sqrt{(x-3)^3}+x=0$ (vô nghiệm do $x\ge 3$)

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{4;\dfrac{9+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Cách 3: Phương trình đã cho tương đương với:

$$(x-4)(x^2-3x-3)=(x-3)\left(x-2+5\sqrt{x-3}\right)\frac{x-4}{\sqrt{x-3}+1}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=4\ (\text{Nhan}) \\ x^2-3x-3=(x-3)\left(x-2+5\sqrt{x-3}\right)\dfrac{1}{\sqrt{x-3}+1} \qquad (1) \end{array}\right..$$

Giải (1):

$$x^2-3x-3=(x-3)\frac{x-2+5\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+1}\Leftrightarrow\frac{x^2-3x-3}{x-3}=\frac{x-2+5\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+1}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-4)^2+5(x-4)+1}{(x-4)+1}=\frac{(x-3)+5\sqrt{x-3}+1}{\sqrt{x-3}+1}.$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+5t+1}{t+1}, t\ge 0$.

$f'(t)=\dfrac{t^2+2t+4}{(t+1)^2}>0, \forall t\ge 0$, suy ra hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+5t+1}{t+1}$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Suy ra $\sqrt{x-3}=x-4\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge 4 \\ x-3=(x-4)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge 4 \\ x^2-9x+19=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge 4 \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{9+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{9-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\end{cases}$

$\Rightarrow x=\dfrac{9+\sqrt{5}}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{4;\dfrac{9+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

b). Cho sáu thẻ, mỗi thẻ ghi một trong các số của tập $E=\{1;2;3;4;6;8\}$ (*các thẻ khác nhau ghi các số khác nhau*). Rút ngẫu nhiên ba thẻ, tính xác suất để rút được ba thẻ ghi ba số là số đo ba cạnh của một tam giác có góc tù.

Lời giải

Cách của Admin Nguyễn Trung Kiên.

Lấy ba thẻ từ 6 thẻ có số cách lấy là C_6^3, nên số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=C_6^3=20$.

Gọi biến cố A: "rút được ba thẻ ghi ba số là số đo ba cạnh của một tam giác có góc tù".

Giả sử rút được bộ ba số là $(a;b;c)$, với $a<b<c$, do đó $4\le c$, nên $c\in\{4;6;8\}$.

a, b, c là ba cạnh của tam giác ΔABC, với $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ có góc C tù

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0\\ 4\le c<a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2+b^2<c^2\\ 4\le c<a+b\end{cases}\Rightarrow\sqrt{a^2+b^2}<c<a+b,\text{ với } c\in\{4;6;8\}.$$

+Xét $c=4$ thì có bộ $(a;b)=(2;3)$ thỏa mãn.

+Xét $c=6$, do $a<b<c$, $6=c<a+b<2b$, nên $b=4$ và $a=3$. Suy ra có bộ $(a;b)=(3;4)$ thỏa mãn.

+Xét $c=8$, do $a<b<c$, $8=c<a+b<2b$, nên $b=6$ và $a=3$ hoặc $a=4$. Suy ra có hai bộ $(a;b)=(3;6)$ hoặc $(a;b)=(4;6)$ thỏa mãn.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A|=4$.

Nên xác suất cần tìm là $p=\dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\dfrac{4}{20}=\dfrac{1}{5}$.

Câu 3 *(2.0 điểm).* Cho tích phân $I(t)=\int\limits_0^t (x\sin x)^2\,\mathrm{d}x$.

a. Tính $I(t)$ khi $t=\pi$.

Lời giải

Tác giả: Trần Quốc Khang, Hà Lê; Fb: Bi Trần, Ha Le

a. Khi $t=\pi$, ta có:

$$+\ I(\pi)=\int\limits_0^\pi x^2\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi x^2(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3}\Big|_0^\pi-\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi x^2\cos 2x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{2}.J.$$

$$+\text{ Với } J=\int\limits_0^\pi x^2\cos 2x\,\mathrm{d}x.\text{ Đặt}\begin{cases}u=x^2\\ \mathrm{d}v=\cos 2x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{1}{2}\sin 2x\end{cases}.$$

+ Ta có $J=\frac{x^2}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}x\sin 2x\,\mathrm{d}x=-\int_0^{\pi}x\sin 2x\,\mathrm{d}x$. Đặt

$$\begin{cases}u_1=x\\ \mathrm{d}v_1=\sin 2x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u_1=\mathrm{d}x\\ v_1=\frac{-1}{2}\cos 2x\end{cases}$$

$$\Rightarrow J=-\left(-\frac{x}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\cos 2x\,\mathrm{d}x\right)=\left(\frac{x}{2}\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}.$$

+ Vậy $I(\pi)=\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{2}J=\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}$.

b. Chứng minh rằng: $I(t)+I(-t)=0$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Bình; Fb:Nguyễn Bình

+ Xét $I(-t)=\int_0^{-t}(x\sin x)^2\mathrm{d}x$. Đặt $x=-u$, suy ra $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow u=0$; $x=-t\Rightarrow u=t$.

Khi đó: $I(-t)=-\int_0^{t}[-u\sin(-u)]^2\,\mathrm{d}u=-\int_0^{t}(x\sin x)^2\,\mathrm{d}x$.

Vậy $I(t)+I(-t)=\int_0^{t}(x\sin x)^2\mathrm{d}x-\int_0^{t}(x\sin x)^2\mathrm{d}x=0$ (đpcm).

Nhận xét: Nếu làm trắc nghiệm thì có thể làm nhanh hơn.

Do hàm số $y=(x\sin x)^2$ là hàm chẵn nên ta có tính chất: $\int_{-t}^{0}(x\sin x)^2\mathrm{d}x=\int_0^{t}(x\sin x)^2\mathrm{d}x$.

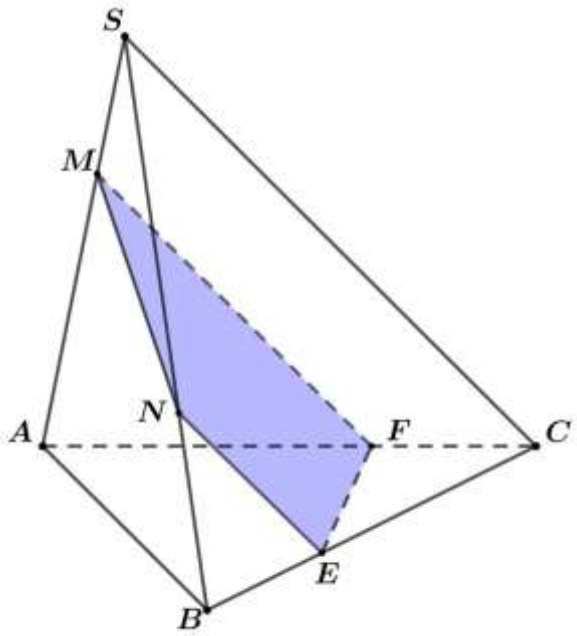
Khi đó: $I(t)+I(-t)=\int_0^{t}(x\sin x)^2\mathrm{d}x+\int_0^{-t}(x\sin x)^2\mathrm{d}x=\int_0^{t}(x\sin x)^2\mathrm{d}x-\int_{-t}^{0}(x\sin x)^2\mathrm{d}x=0$

Câu 4 *(3.0 điểm)* Cho khối tứ diện $SABC$ và hai điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh SA, SB sao cho $\frac{SM}{MA}=\frac{1}{2},\frac{SN}{NB}=2$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm M, N và song song với đường thẳng SC.

a. Trong trường hợp $SABC$ là tứ diện đều cạnh a, xác định và tính theo a diện tích thiết diện của khối tứ diện $S.ABC$ với mặt phẳng (P).

Lời giải

Tác giả: Phạm Thị Phương Thúy, Trần Bạch Mai; Fb: thuypham, Bạch Mai



*) Xác định thiết diện

Ta có: $\begin{cases} SC//(P) \\ SC \subset (SAC) \\ M \in (P) \cap (SAC) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (SAC) = MF \ (MF//SC; F \in AC)$.

Ta có: $\begin{cases} SC//(P) \\ SC \subset (SBC) \\ N \in (P) \cap (SBC) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (SBC) = NE \ (NE//SC; E \in BC)$.

$\Rightarrow$ Thiết diện là tứ giác $MNEF$.

Mặt khác ta có:

+) $NE//MF\,(//SC)$.

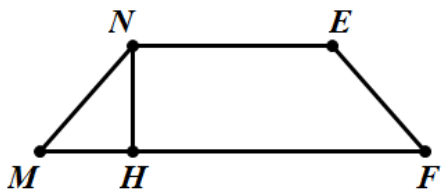
+) $\Delta SMN = \Delta CFE \Rightarrow MN = FE$.

+) $NE//SC \Leftrightarrow \dfrac{NE}{SC} = \dfrac{BN}{BS} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow NE = \dfrac{a}{3}$.

+) $MF//SC \Leftrightarrow \dfrac{MF}{SC} = \dfrac{AM}{AS} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow MF = \dfrac{2a}{3}$.

Vậy thiết diện $MNEF$ là hình thang cân.

*) Tính diện tích thiết diện



Xét ΔSMN có $MN=\sqrt{SM^2+SN^2-2.SM.SN.\cos MSN}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

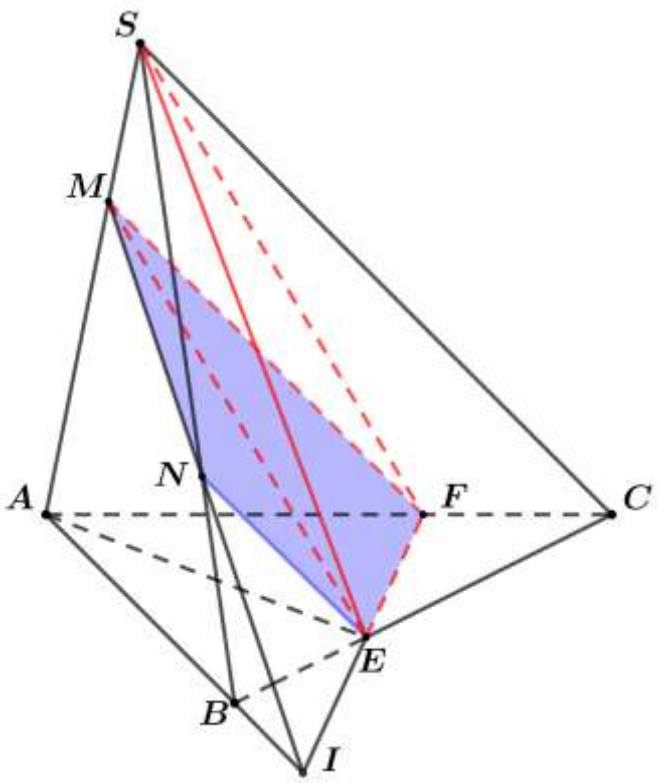
Kẻ $NH\perp MF$, $MNEF$ là hình thang cân $\Rightarrow MH=\dfrac{MF-NE}{2}=\dfrac{a}{6}\Rightarrow NH=\dfrac{a\sqrt{11}}{6}$.

Vậy diện tích thiết diện là: $S_{MNEF}=\dfrac{1}{2}(NE+MF).NH=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{3}+\dfrac{2a}{3}\right)\dfrac{a\sqrt{11}}{6}=\dfrac{a^2\sqrt{11}}{12}$.

b. Trong trường hợp bất kì, mặt phẳng (P) chia tứ diện $SABC$ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

Lời giải

Tác giả: Trương Hồng Hà & Vũ Việt Tiến; Fb: Trương Hồng Hà & Vũ Việt Tiến



<u>Cách 1:</u> Vì $mp(P)$ đi qua M,N và song song với SC nên:

$(P)\cap(SAC)=MF,(F\in AC,MF//SC)$; $(P)\cap(SBC)=NE,(E\in BC,NE//SC)$.

Khi đó $\frac{CF}{CA}=\frac{SM}{SA}=\frac{1}{3};\ \frac{CE}{CB}=\frac{SN}{SB}=\frac{2}{3}$.

Mặt phẳng (P) chia khối tứ diện $SABC$ thành hai khối: $MNEFSC$ và $MNEFAB$.

+ Gọi $V_{SABC}=V,\ V_{MNEFSC}=V_1,\ V_{MNEFAB}=V_2$.

+ Ta có $V_1=V_{MNEFSC}=V_{CSEF}+V_{SFME}+V_{SMNE}$.

+ $\frac{V_{CSEF}}{V_{CSBA}}=\frac{CE}{CB}.\frac{CF}{CA}=\frac{2}{9}\Rightarrow V_{CSEF}=\frac{2}{9}V$.

+ $\frac{V_{SFME}}{V_{SFAE}}=\frac{SN}{SA}=\frac{1}{3}$ (1).

+ Mà $\frac{V_{SFAE}}{V_{SABC}}=\frac{\frac{1}{3}d(S,(AEF)).S_{AEF}}{\frac{1}{3}d(S,(ABC)).S_{ABC}}=\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{1}{2}d(E,AF).FA}{\frac{1}{2}d(B,AC).AC}=\frac{\frac{2}{3}d(B,AC).\frac{2}{3}AC}{d(B,AC).AC}=\frac{4}{9}$.

$\Rightarrow\frac{V_{SFAE}}{V_{SABC}}=\frac{4}{9}\Rightarrow V_{SFAE}=\frac{4}{9}V$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $V_{SFME}=\frac{1}{3}.\frac{4}{9}V=\frac{4}{27}V$.

+ $\frac{V_{SMNE}}{V_{SABE}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}=\frac{1}{3}.\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$ (3).

+ Mà $\frac{V_{SABE}}{V_{SABC}}=\frac{\frac{1}{3}d(S,(ABE)).S_{ABE}}{\frac{1}{3}d(S,(ABC)).S_{ABC}}=\frac{S_{ABE}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{1}{2}d(A,BE).BE}{\frac{1}{2}d(A,BC).BC}=\frac{BE}{BC}=\frac{1}{3}$.

$\Rightarrow\frac{V_{SABE}}{V_{SABC}}=\frac{1}{3}\Rightarrow V_{SABE}=\frac{1}{3}V$ (4).

Từ (1) và (2) suy ra $V_{SABE}=\frac{2}{9}.\frac{1}{3}V=\frac{2}{27}V$.

+ Do đó $V_1=V_{CSEF}+V_{SFME}+V_{SMNE}=\frac{2}{9}V+\frac{4}{27}V+\frac{2}{27}V=\frac{4}{9}V\Rightarrow V_2=\frac{5}{9}V$.

+ Vậy $\frac{V_1}{V_2}=\frac{4}{5}$ hoặc $\frac{V_2}{V_1}=\frac{5}{4}$.

<u>Cách 2</u>: Vì $MF//NE//SC$ nên tứ giác $MNEF$ là hình thang.

Gọi $I=FE\cap MN\Rightarrow I\in AB$.

Theo định lý Mennelaus, ta có

+ $\frac{SM}{AM}.\frac{AI}{BI}.\frac{BN}{SN}=1\Rightarrow\frac{AI}{BI}=4\Rightarrow\frac{IB}{IA}=\frac{1}{4}$.

+ $\frac{AB}{IB}.\frac{IE}{FE}.\frac{FC}{AC}=1\Rightarrow\frac{IE}{FE}=1\Rightarrow E$ là trung điểm của FI.

+ $\frac{V_{IBNE}}{V_{IAMF}}=\frac{IB}{IA}.\frac{IN}{IM}.\frac{IE}{IF}=\frac{1}{4}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{16}\Rightarrow V_2=V_{MNEFAB}=V_{IAMF}-V_{IBNE}=\frac{15}{6}V_{IAMF}$.

Mặt khác $\frac{V_{IAMF}}{V_{BAMF}}=\frac{IA}{BA}=\frac{4}{3}\Rightarrow V_{IAMF}=\frac{4}{3}V_{BAMF}$.

+ $S_{ABF}=\frac{2}{3}S_{ABC};\frac{AM}{AS}=\frac{2}{3}\Rightarrow V_{BAMF}=\frac{4}{9}V_{SABC}$.

$\Rightarrow V_2=\frac{15}{16}.\frac{4}{3}.\frac{4}{9}V_{SABC}=\frac{5}{9}V\Rightarrow V_1=\frac{4}{9}V$.

+ Vậy $\frac{V_1}{V_2}=\frac{4}{5}$ hoặc $\frac{V_2}{V_1}=\frac{5}{4}$.

Câu 5 *(1.0 điểm)* Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n>1$ ta luôn có:

$$\log_n(n+1)>\log_{n+1}(n+2)$$

Lời giải

Tác giả:Hoàng Văn Phiên; Fb:Phiên Văn Hoàng

<u>Cách 1</u>

+ Xét $A=\sqrt{\frac{\log_{n+1}(n+2)}{\log_n(n+1)}}=\sqrt{\log_{n+1}n.\log_{n+1}(n+2)}$.

+ Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ cho hai số dương $\log_{n+1}n$ và $\log_{n+1}(n+2)$ ta được:

$$\sqrt{\log_{n+1}n.\log_{n+1}(n+2)}\le\frac{\log_{n+1}n+\log_{n+1}(n+2)}{2}=\frac{\log_{n+1}n(n+2)}{2}.$$

+ Mà $n^2+2n<n^2+2n+1$ nên $n^2+2n<(n+1)^2$.

$$\Rightarrow\frac{\log_{n+1}(n^2+2n)}{2}<\frac{\log_{n+1}(n+1)^2}{2}\Leftrightarrow\frac{\log_{n+1}(n^2+2n)}{2}<1.$$

$$\Rightarrow \sqrt{\log_{n+1} n.\log_{n+1}(n+2)} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\log_{n+1}(n+2)}{\log_n(n+1)}} < 1 \Leftrightarrow \log_{n+1}(n+2) < \log_n(n+1).$$

<u>Cách 2</u>

Tác giả:; Fb:Nguyen Trang

+ Với mọi số nguyên dương $n > 1$ ta có:

$$\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2) \Leftrightarrow \frac{\ln(n+1)}{\ln n} > \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}.$$

+ Xét hàm số $y = \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$ với $x > 1$.

+ Ta có: $y' = \dfrac{\dfrac{\ln x}{x+1} - \dfrac{\ln(x+1)}{x}}{(\ln x)^2} = \dfrac{x\ln x - (x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)(\ln x)^2}$.

+ Với $\forall x > 1$ thì $x+1 > x > 1$; $\ln(x+1) > \ln x > 0 \Rightarrow x\ln x - (x+1)\ln(x+1) < 0$.

$\Rightarrow y' < 0, \forall x > 1$.

Suy ra hàm số nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

+ Do đó với mọi số nguyên dương $n > 1$ thì $y(n) > y(n+1)$.

Vậy $\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)$.

ĐỀ THI CHỌN HSG THÀNH PHỐ LỚP 12 SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THÀNH PHỐ ĐÀ NẴNG

MÔN TOÁN

TIME: 90 PHÚT

Câu 1. [2H2-1.2-1] Một hình trụ có bán kính đáy bằng R và chiều cao bằng $R\sqrt{3}$ thì diện tích xung quanh của nó bằng

A. $2\sqrt{3}\pi R^2$. **B.** πR^2. **C.** $2\pi R^2$. **D.** $\sqrt{3}\pi R^2$.

Câu 2 . [2D2-1.3-2] So sánh 3 số $a=(0,2)^{2019}; b=e^{2019}; c=\pi^{2019}$.

A. $b<a<c$. **B.** $a<b<c$. **C.** $a<c<b$. **D.** $c<b<a$.

Câu 3. [2D1-4.1-1] Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-4}{2-x}$ có phương trình là

A. $y=-2$. **B.** $x=2$. **C.** $y=-1$. **D.** $x=4$.

Câu 4. [2D2-4.1-1] Tập xác định của hàm số $y=\log_2\dfrac{2-x}{x}$ là

A. $(0;2]$. **B.** $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$.

C. $(-\infty;0)\cup[2;+\infty)$. **D.** $(0;2)$.

Câu 5. [2H2-1.1-2] Đường sinh của một khối nón có độ dài bằng $2a$ và hợp với đáy một góc 60^0. Thể tích của khối nón đó bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}.\pi a^3}{3}$. **B.** πa^3. **C.** $\dfrac{\pi a^3}{3}$. **D.** $\sqrt{3}.\pi a^3$.

Câu 6. [2D1-1.1-2] Hàm số $y=x^4-4x^3$ đồng biến trên khoảng

A. $(-\infty;+\infty)$. **B.** $(3;+\infty)$.

C. $(-1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Câu 7. [2D3-2.1-1] Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x.$ **B.** $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=0.$

C. $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x.$ **D.** $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$

Câu 8. **[2H2-2.1-1]** Nếu tăng bán kính một khối cầu lên 5 lần thì thể tích của khối cầu tăng lên

A. 125 lần. **B.** 25 lần. **C.** 5 lần. **D.** 10 lần.

Câu 9. **[2D3-2.1-2]** Giả sử $\int_1^2 \frac{dx}{x+3} = \ln\frac{a}{b}$ với a, b là các số tự nhiên có ước chung lớn nhất bằng 1. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a-b>2$. **B.** $a^2-b^2=41$. **C.** $a+2b=14$. **D.** $3a-b<12$.

Câu 10. **[1H1-3.1-2]** Trong không gian cho hình vuông (H). Hỏi hình (H) có bao nhiêu trục đối xứng?

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 11. **[1D3-4.3-1]** Một cấp số nhân với công bội bằng -2, có số hạng thứ ba bằng 8 và số hạng cuối bằng -1024. Hỏi cấp số nhân đó có bao nhiêu số hạng?

A. 11. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 8.

Câu 12. **[2H3-1.1-1]** Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 3$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^0$. Độ dài véc tơ $3\vec{a} - 2\vec{b}$ bằng

A. 9. **B.** 1. **C.** 6. **D.** 54.

Câu 13. **[2H1-3.2-3]** Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng $a\sqrt{3}$ và hai đường thẳng AB', BC' vuông góc với nhau. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

A. $6a^3$. **B.** $\frac{5}{2}a^3$. **C.** a^3. **D.** $\frac{9}{2}a^3$.

Câu 14. **[2D1-1.3-2]** Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{2x+m}{\sqrt{x^2+1}}$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ là:

A. $m \le 0$. **B.** $m > 1$. **C.** $m \le 1$. **D.** $m < 2$.

Câu 15. **[2H1-3.2-2]** Một khối chóp tam giác có đường cao bằng $10cm$ và các cạnh đáy bằng $20cm, 21cm, 29cm$. Thể tích của khối chóp đó bằng

A. $700cm^3$. **B.** $2100cm^3$. **C.** $20\sqrt{35}cm^3$. **D.** $700\sqrt{2}cm^3$.

Câu 16. **[2D3-2.2-2]** Giả sử $\int_1^{16} f(x)dx = 2020$, khi đó giá trị của $\int_1^2 x^3 f(x^4)dx$ bằng

A. 2020^4. **B.** $\sqrt[4]{2020}$. **C.** 8080. **D.** 505.

Câu 17. **[2D2-3.2-2]** Cho các số thực dương a, b, c thỏa $a^{\log_3 7} = 27$, $b^{\log_7 11} = 49$, $c^{\log_{11} 25} = \sqrt{11}$. Tính giá trị biểu thức $S = \sqrt[3]{a^{(\log_3 7)^2}} + \sqrt{b^{(\log_7 11)^2}} + c^{(\log_{11} 25)^2}$.

A. $S=25$. **B.** $S=20$. **C.** $S=22$. **D.** $S=23$.

Câu 18. **[2H2-2.2-2]** Một khối cầu ngoại tiếp khối lập phương. Tỉ số thể tích giữa khối cầu và khối lập phương là

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{3\pi\sqrt{3}}{8}$.

Câu 19. **[0D4-5.2-2]** Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa mãn: $(x-4)^2+(y-4)^2+2xy\le 32$. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $x+y$ bằng:

A. 0 . **B.** 4 . **C.** 8 . **D.** 12 .

Câu 20. **[2H3-1.1-2]** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(1;1;1), N(-1;-1;0), P(3;1;-1)$. Tìm tọa độ điểm I thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho I cách đều ba điểm M, N, P.

A. $I(2;1;0)$. **B.** $I\left(-\frac{7}{4};2;0\right)$. **C.** $I\left(2;\frac{7}{4};0\right)$. **D.** $I\left(2;-\frac{7}{4};0\right)$.

Câu 21. **[2H2-1.2-2]** Cho hình trụ (T) có hai hình tròn đáy là (O) và (O'). Xét hình nón (N) có đỉnh O', đáy là hình tròn (O) và đường sinh hợp với đáy một góc α. Biết tỉ số giữa diện tích xung quanh hình trụ (T) và diện tích xung quanh hình nón (N) bằng $\sqrt{3}$. Tính số đo góc α.

A. $\alpha=45^0$. **B.** $\alpha=60^0$. **C.** $\alpha=30^0$. **D.** $\alpha=75^0$.

Câu 22. **[2H1-3.3-1]** Trên ba cạnh OA, OB, OC của khối chóp $O.ABC$ lần lượt lấy các điểm A', B', C' sao cho $2OA'=OA$, $4OB'=OB$ và $3OC'=OC$. Tỉ số thể tích giữa hai khối chóp $O.A'B'C'$ và $O.ABC$ là

A. $\frac{1}{12}$. **B.** $\frac{1}{24}$. **C.** $\frac{1}{32}$. **D.** $\frac{1}{16}$.

Câu 23. **[2D3-3.7-2]** Cho số thực a và hàm số $f(x)=\begin{cases}2x & \text{khi } x\le 0\\ a(x-x^2) & \text{khi } x>0.\end{cases}$ Tính $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{a}{6}-1$. **B.** $\frac{2a}{3}+1$. **C.** $\frac{a}{6}+1$. **D.** $\frac{2a}{3}-1$.

Câu 24. **[2D2-3.2-2]** Cho $\log_5 7=a$ và $\log_5 4=b$. Biểu diễn $\log_5 560$ dưới dạng $\log_5 560=m.a+n.b+p$, với m, n, p là các số nguyên. Tính $S=m+n.p$.

A. $S=3$. **B.** $S=4$. **C.** $S=2$. **D.** $S=5$.

Câu 25. **[2D1-5.6-1]** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+x-3$ tại điểm có hoành độ bằng -1 là

A. $y=x+4$. **B.** $y=x-4$. **C.** $y=9x+4$.
D. $y=-7x-12$.

Câu 26. **[2D1-4.1-2]** Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{9x^2-4}+2x^2+1}{x^2-3x}$ là

A. 2. **B.** 4 . **C.** 1. **D.** 3.

Câu 27. **[1D2-2.1-1]** Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn, có 3 chữ số đôi một khác nhau được lấy từ các số $1,2,3,4,5,6$.

A. 180. **B.** 720. **C.** 60. **D.** 120

Câu 28. **[2D1-3.1-1]** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x^3-5x^2+4x-2$ trên đoạn $[0;2]$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** $-\dfrac{74}{27}$. **D.** -1.

Câu 29. **[2D1-2.4-1]** Điều kiện cần và đủ để hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ (với a,b,c là các tham số) có ba cực trị là:

A. $ab\le 0$. **B.** $ab<0$. **C.** $ab>0$. **D.** $ab\ge 0$.

Câu 30. **[1D3-3.3-2]** Cho cấp số cộng u_n có $u_1=-1$ và $u_5=9$. Tìm u_3.

A. $u_3=4$. **B.** $u_3=3$. **C.** $u_3=5$. **D.** $u_3=6$.

Câu 31. **[2D3-2.4-3] [2D3-2.4-3] [2D3-2.4-3] [2D3-2.4-3] [2D3-2.4-3] [2D2-5.5-3]** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-8;+\infty)$ để phương trình sau có nhiều hơn hai nghiệm phân biệt?

$$x^2+x(x-1)2^{x+m}+m=(2x^2-x+m).2^{x-x^2}.$$

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 8.

Câu 32 **[2H2-2.7-3].** Trong không gian cho tam giác ABC có $AB=2R,\ AC=R,\ CAB=120°$. Gọi M là điểm thay đổi thuộc mặt cầu tâm B, bán kính R. Giá trị nhỏ nhất của $MA+2MC$ là

A. $4R$. **B.** $6R$. **C.** $R\sqrt{19}$. **D.** $2R\sqrt{7}$.

Câu 33 . **[2D3-2.4-3]** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=x(x^2-1)\sqrt{x^2+3}$. Giả sử a,b là hai số thực thay đổi sao cho $a<b\le 1$. Giá trị nhỏ nhất của $f(a)-f(b)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}-64}{15}$. **B.** $\dfrac{33\sqrt{3}-64}{15}$. **C.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. **D.** $-\dfrac{11\sqrt{3}}{5}$.

Câu 34. **[2H3-1.3-2]** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(5;3;1)$, $B(4;-1;3)$, $C(-6,2,4)$ và $D(2;1;7)$. Biết rằng tập hợp các điểm M thỏa $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$ là một mặt cầu (S). Xác định tọa độ tâm I và tính bán kính R của mặt cầu (S).

A. $I\left(\frac{4}{3};1;\frac{2}{3}\right), R=\frac{\sqrt{3}}{3}$.
B. $I\left(\frac{1}{3};\frac{14}{3};\frac{2}{3}\right), R=\frac{\sqrt{21}}{3}$.
C. $I\left(1;\frac{14}{3};\frac{8}{3}\right), R=\frac{\sqrt{21}}{3}$.
D. $I\left(\frac{8}{3};\frac{10}{3};\frac{1}{3}\right), R=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 35. **[2D1-5.7-2]** Tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x+1-m^2$ có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ là

A. $(-\infty;-1)\cup(0;1)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-1;0)\cup(1;+\infty)$.

Câu 36. **[2H1-3.4-3]** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có góc giữa mặt bên và mặt đáy (ABC) bằng $60°$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\frac{3a\sqrt{7}}{14}$, tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 37. **[2D3-4.4-3]** Cho hàm số $f\ x$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_{-2}^{2} f\ \sqrt{x^2+5}-x\ \mathrm{dx}=1$, $\int_{1}^{5}\frac{f\ x}{x^2}\mathrm{dx}=3$. Tính $\int_{1}^{5} f\ x\ \mathrm{dx}$.

A. -15. **B.** -2. **C.** -13. **D.** 0.

Câu 38. **[2H1-3.3-3]** Cho hình chóp tứ giác đều có độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $2a$. Tính theo a thể tích của khối đa diện có các đỉnh là trung điểm các cạnh của hình chóp đã cho.

A. $\frac{5a^3}{24}$. **B.** $\frac{5a^3}{12}$. **C.** $\frac{a^3}{12}$. **D.** $\frac{3a^3}{8}$.

Câu 39. **[2H1-3.3-4]** Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng V. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, $B'C'$ và DD'. Thể tích khối tứ diện $C'.MNP$ bằng

A. $\frac{V}{32}$. **B.** $\frac{V}{8}$. **C.** $\frac{V}{16}$. **D.** $\frac{V}{4}$.

Câu 40. **[2D1-5.3-3]** Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\left|\tan^4 x-\dfrac{2}{\cos^2 x}\right|=m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ là

A. $m=3$ **B.** $2<m<3$ **C.** $2\le m\le 3$ **D.** $m=2$

Câu 41. **[2D2-5.5-4]** Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $3^{x^2-2x+1-2|x-m|}=\log_{x^2-2x+3}\left(2|x-m|+2\right)$ có đúng ba nghiệm phân biệt:

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 42. **[2D4-5.1-1]** Cho phương trình $25^{1+\sqrt{1-x^2}}-(m+2).5^{1+\sqrt{1-x^2}}+2m+1=0$, với m là tham số. Giá trị nguyên dương lớn nhất của tham số m để phương trình có nghiệm là

A. 5. **B.** 26. **C.** 25. **D.** 6.

Câu 43. **[2D1-3.2-3]** Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{1+\cos x}{\cos^2 x+\cos x+1}$ .Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2M=3m$. **B.** $M-m=\dfrac{2}{3}$. **C.** $M-m=1$. **D.** $M-m=\dfrac{3}{2}$.

Câu 44. **[2D1-2.2-3]** Cho hàm số $f(x)=x^3-4x^2$. Hỏi hàm số $g(x)=f\left(|x|-1\right)$ có bao nhiêu cực trị?

A. 6. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 45. **[2H3-3.8-3]** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S_1) có tâm $I_1(1;0;1)$, bán kính $R_1=2$ và mặt cầu (S_2) có tâm $I_2(1;3;5)$, bán kính $R_2=1$. Đường thẳng d thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với (S_1), (S_2) lần lượt tại A và B. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của đoạn AB. Tính $P=M.m$.

A. $P=2\sqrt{6}$. **B.** $P=8\sqrt{5}$. **C.** $P=4\sqrt{5}$. **D.** $P=8\sqrt{6}$.

Câu 46. **[2D1-2.15-3]** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^4+4mx^3+3(m+1)x^2+1$ có cực tiểu mà không có cực đại.

A. $m\in\left(-\infty;\dfrac{1-\sqrt{7}}{3}\right]$. **B.** $m\in\left[\dfrac{1-\sqrt{7}}{3};1\right]\cup\{-1\}$.

C. $m\in\left[\dfrac{1+\sqrt{7}}{3};+\infty\right)$. **D.** $m\in\left[\dfrac{1-\sqrt{7}}{3};\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\right]\cup\{-1\}$.

Câu 47. **[2D2-6.4-2]** So sánh ba số $a=1000^{1001}$, $b=2^{2^{64}}$ và $c=1^1+2^2+3^3+...+1000^{1000}$.

A. $c<a<b$. **B.** $b<a<c$. **C.** $c<b<a$. **D.** $a<c<b$.

Câu 48. **[2D1-1.3-4]** Cho các hàm số $f(x)=x^2-4x+m$ và $g(x)=(x^2+1)(x^2+2)^2(x^2+3)^3$. Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $g(f(x))$ đồng biến trên $(3;+\infty)$ là

A. $[3;4)$. **B.** $[0;3)$. **C.** $[4;+\infty)$. **D.** $[3;+\infty)$.

Câu 49. **[2D3-2.2-4]** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập $\mathbb{R}$ và thỏa $f'(x)+2f'(-x)=\dfrac{2|x|}{x^6+x^2+1}$ với mọi số thực x. Giả sử $f(2)=m$, $f(-3)=n$. Tính giá trị biểu thức $T=f(-2)-f(3)$.

A. $T=m+n$. **B.** $T=n-m$. **C.** $T=m-n$. **D.** $T=-m-n$.

Câu 50. **[2D2-7.1-3]** Cho các số thực dương x, y thay đổi và thỏa điều kiện $x>y>1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\log^2_{\frac{x}{y}}(x^2)+3\log_y\dfrac{x}{y}$ là:

A. 19. **B.** 13. **C.** 14. **D.** 15.

GIẢI CHI TIẾT ĐỀ THI CHỌN HSG THÀNH PHỐ LỚP 12 SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THÀNH PHỐ ĐÀ NẴNG

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.B	3.C	4.D	5.A	6.B	7.C	8.A	9.D	10.A
11.B	12.C	13.D	14.A	15.A	16.D	17.D	18.C	19.C	20.D
21.B	22.B	23.A	24.A	25.B	26.A	27.C	28.A	29.B	30.A
31.B	32.C	33.B	34.C	35.A	36.D	37.C	38.B	39.C	40.B
41.B	42.C	43.C	44.C	45.D	46.D	47.A	48.D	49.B	50.D

Câu 1. [2H2-1.2-1] Một hình trụ có bán kính đáy bằng R và chiều cao bằng $R\sqrt{3}$ thì diện tích xung quanh của nó bằng

A. $2\sqrt{3}\pi R^2$. **B.** πR^2. **C.** $2\pi R^2$. **D.** $\sqrt{3}\pi R^2$.

Lời giải

Tác giả:Lê Thị Hồng Vân ; Fb:Hồng Vân.

Phản biện : Nguyễn My, Fb: Nguyễn My.

Chọn A

Áp dụng công thức tính diện tích xung quanh của hình trụ $S_{xq} = 2\pi Rl$ với $l = R\sqrt{3}$ ta có $S_{xq} = 2\pi R.R\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\pi R^2$.

Câu 2 . [2D2-1.3-2] So sánh 3 số $a = (0,2)^{2019}; b = e^{2019}; c = \pi^{2019}$.

A. $b < a < c$. **B.** $a < b < c$. **C.** $a < c < b$. **D.** $c < b < a$.

Lời giải

Tác giả:Lê Thị Hồng Vân; Fb:Hồng Vân.

Phản biện : Nguyễn My, Fb: Nguyễn My.

Chọn B

Áp dụng tính chất: nếu $\begin{cases} 0 < a < b \\ x > 0 \end{cases}$ thì $a^x < b^x$ Ta có $\begin{cases} 0 < 0,2 < e < \pi \\ 2019 > 0 \end{cases}$ nên $a < b < c$

Câu 3. **[2D1-4.1-1]** Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-4}{2-x}$ có phương trình là

A. $y = -2$. **B.** $x = 2$. **C.** $y = -1$. **D.** $x = 4$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Trà My; Fb: Nguyễn My

Phản biện:Trần Trung; Fb: Trung Tran

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x-4}{2-x} = -1$. Vậy đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = -1$.

Câu 4. **[2D2-4.1-1]** Tập xác định của hàm số $y = \log_2 \dfrac{2-x}{x}$ là

A. $(0;2]$. **B.** $(-\infty;0) \cup (2;+\infty)$.

C. $(-\infty;0) \cup [2;+\infty)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Trà My ; Fb: Nguyễn My

Phản biện:Trần Trung; Fb: Trung Tran

Chọn D

Hàm số $y = \log_2 \dfrac{2-x}{x}$ xác định khi $\dfrac{2-x}{x} > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$

Vậy tập xác định của hàm số $y = \log_2 \dfrac{2-x}{x}$ là $D = (0;2)$

Câu 5. **[2H2-1.1-2]** Đường sinh của một khối nón có độ dài bằn $2a$ và hợp vớiđáy một góc 60^0. Thể tích của khối nónđó bằng

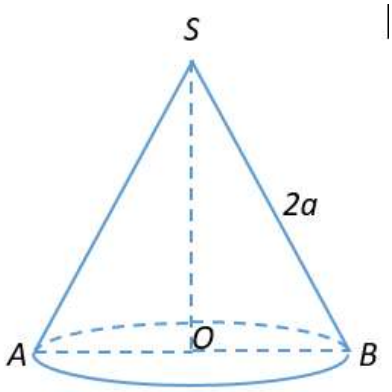
A. $\dfrac{\sqrt{3}.\pi a^3}{3}$. **B.** πa^3. **C.** $\dfrac{\pi a^3}{3}$. **D.** $\sqrt{3}.\pi a^3$.

Lời giải

Tác giả: Trần Mạnh Trung; Fb: Trung Tran

PB: Trần Minh Tuấn; Fb:Trần Minh Tuấn

Chọn A



Ta có SB tạo vớiđáy một góc 60^0 suy ra $SBA = 60^0$.

Ta có tam giác ΔSAB là tam giác cân tại S và có một góc bằng 60^0.

Suy ra tam giác ΔSAB đều cạnh $2a$.

Ta có $h = SO = a\sqrt{3}$.

Suy ra $V = \frac{1}{3}.h.\pi R^2 = \frac{1}{3}.(a\sqrt{3}).\pi.a^2 = \frac{\sqrt{3}.\pi.a^3}{3}$

Câu 6. **[2D1-1.1-2]** Hàm số $y = x^4 - 4x^3$ đồng biến trên khoảng

A. $(-\infty;+\infty)$.

B. $(3;+\infty)$.

C. $(-1;+\infty)$.

D. $(-\infty;0)$.

Lời giải

Tác giả: Trần Mạnh Trung ; Fb: Trung Tran

PB:Trần Minh Tuấn; Fb:Trần Minh Tuấn

Chọn B

Ta có $y' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$

Vậy hàm số $y = x^4 - 4x^3$ đồng biến trên $(3;+\infty)$

Câu 7. **[2D3-2.1-1]** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

B. $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$.

C. $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x$.

D. $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Tác giả:Trần Minh Tuấn_Bắc Ninh; Fb: Trần Minh Tuấn

Phản biện: Hoàng Vũ; FB: Hoàng Vũ

Chọn C

Xét tích phân $\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x$. Đặt

$$\begin{aligned} &t=1-x \Rightarrow dt=-dx \\ &x=0 \to t=1 \\ &x=1 \to t=0 \end{aligned} \Rightarrow \int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x. = \int_1^0 f(t)(-\mathrm{d}t) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

Câu 8. **[2H2-2.1-1]** Nếu tăng bán kính một khối cầu lên 5 lần thì thể tích của khối cầu tăng lên

A. 125 lần. **B.** 25 lần. **C.** 5 lần. **D.** 10 lần.

Lời giải

Tác giả: Trần Minh Tuấn_Bắc Ninh; Fb:Trần Minh Tuấn

Phản biện: Hoàng Vũ; FB: Hoàng Vũ

Chọn A

Ta có

$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

$V'=\frac{4}{3}\pi(5R)^3=125V$

Câu 9. **[2D3-2.1-2]** Giả sử $\int_1^2 \frac{dx}{x+3}=\ln\frac{a}{b}$ với a,b là các số tự nhiên có ước chung lớn nhất bằng 1. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a-b>2$. **B.** $a^2-b^2=41$. **C.** $a+2b=14$. **D.** $3a-b<12$.

Lời giải

Tác giả: Hoàng Vũ ; Fb: Hoàng Vũ

Giáo Viên Phản Biện: Hoài Lệ ; Fb: Hoài Lệ

Chọn D

$\int_1^2 \frac{dx}{x+3}=\ln|x+3|\Big|_1^2=\ln 5-\ln 4=\ln\frac{5}{4}$.

$\Rightarrow a=5, b=4 \Rightarrow 3a-b<12$

Câu 10. **[1H1-3.1-2]** Trong không gian cho hình vuông (H). Hỏi hình (H) có bao nhiêu trục đối xứng?

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

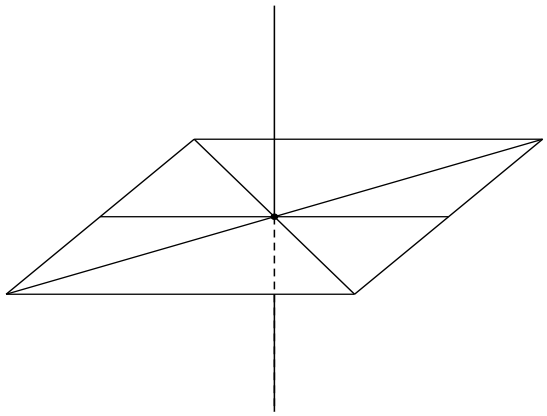
Lời giải

Tác giả: Hoàng Vũ ; Fb: Hoàng Vũ

Giáo Viên Phản Biện: Hoài Lệ ; Fb: Hoài Lệ

Chọn C

Trong không gian hình vuông có 5 trục đối xứng.



Câu 11. **[1D3-4.3-1]** Một cấp số nhân với công bội bằng -2, có số hạng thứ ba bằng 8 và số hạng cuối bằng -1024. Hỏi cấp số nhân đó có bao nhiêu số hạng?

B. 11. **B.** 10 . **C.** 9 . **D.** 8 .

Lời giải

Tác giả: Nguyễn lệ Hoài; Fb: Hoài Lệ

Phản biện: Lê Trọng Hiếu; Fb: Hieu Le

Chọn B

$q=-2; u_3=8$ và $u_n=-1024$

Ta có $u_3=u_1.q^2 \Leftrightarrow 8=u_1.4 \Rightarrow u_1=2$

Do đó $u_n=u_1.q^{n-1} \Leftrightarrow -1024=2.(-2)^{n-1} \Rightarrow n=10$

Câu 12. **[2H3-1.1-1]** Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=2\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=3$ và $(\vec{a},\vec{b})=30^0$. Độ dài véc tơ $3\vec{a}-2\vec{b}$ bằng

A. 9 . **B.** 1 . **C.** 6 . **D.** 54 .

Lời giải

Tác giả: Nguyễn lệ Hoài; Fb: Hoài Lệ

Phản biện: Lê Trọng Hiếu; Fb: Hieu Le

Chọn C

Ta có $(3\vec{a}-2\vec{b})^2=9\vec{a}^2-12\vec{a}.\vec{b}+4\vec{b}^2=9.12-12.2\sqrt{3}.3.\cos 30^0+4.9=36 \Rightarrow |3\vec{a}-2\vec{b}|=6$

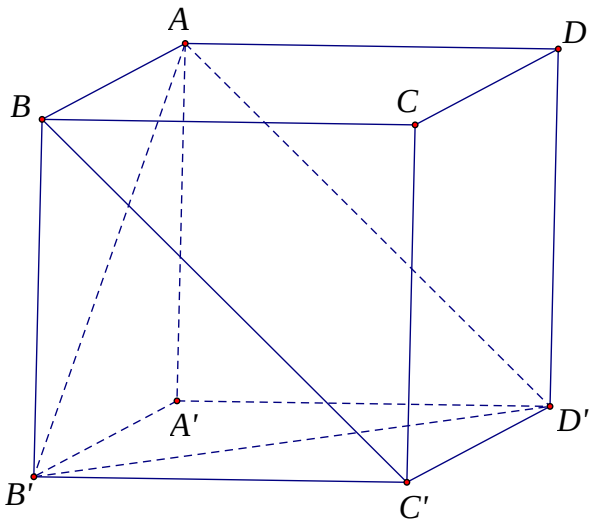
Câu 13. **[2H1-3.2-3]** Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng $a\sqrt{3}$ và hai đường thẳng AB', BC' vuông góc với nhau. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

A. $6a^3$. **B.** $\frac{5}{2}a^3$. **C.** a^3. **D.** $\frac{9}{2}a^3$.

Lời giải

Tác giả: Lê Trọng Hiếu ; Fb: Hieu Le

Phản biện:Phan Thanh Lộc; Fb: Phan Thanh Lộc



Chọn D

Dựng hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Ta có $BC' // AD'$ và $A'B'C'D'$ là hình thoi.

Gọi $A'B' = x \Rightarrow B'D' = x\sqrt{3}$.

Vì $BC' // AD'$ và $AB' \perp BC' \Rightarrow AB' \perp AD'$ và $AB'^2 = AA'^2 + A'B'^2 = x^2 + 3a^2$.

Vì $\Delta AA'D' = \Delta AA'B' \Rightarrow AB' = AD' = x^2 + 3a^2$.

Ta có: $B'D'^2 = AB'^2 + AD'^2 = 2x^2 + 6a^2 = 3x^2 \Leftrightarrow x^2 = 6a^2 \Leftrightarrow x = a\sqrt{6}$.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{\left(a\sqrt{6}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{3} = \frac{9a^3}{2}.$$

Câu 14. **[2D1-1.3-2]** Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{2x+m}{\sqrt{x^2+1}}$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ là:

A. $m \le 0$. **B.** $m > 1$. **C.** $m \le 1$. **D.** $m < 2$.

Lời giải

Tác giả: Lê Trọng Hiếu ; Fb: Hieu Le

Phản biện:Phan Thanh Lộc; Fb: Phan Thanh Lộc

Chọn A

Ta có: $y' = \frac{-mx+1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$.

Hàm số $y=\dfrac{2x+m}{\sqrt{x^2+1}}$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ khi $y'\ge 0$ với mọi $x\in(0;+\infty)$.

$\Leftrightarrow -mx+1\ge 0$ với mọi $x\in(0;+\infty)$.

Ta có:

- $m=0\Rightarrow 1\ge 0\Rightarrow -mx+1\ge 0$ với mọi $x\in(0;+\infty)$.
- $m>0\Rightarrow -mx+1\ge 0\Leftrightarrow x\le\dfrac{1}{m}$ (không thỏa mãn ycbt)
- $m<0\Rightarrow -mx+1\ge 0\Leftrightarrow x\ge\dfrac{1}{m}$. Khi đó $\dfrac{1}{m}\le 0\Leftrightarrow m<0$ (thỏa mãn)

Vậy $m\le 0$ thì hàm số $y=\dfrac{2x+m}{\sqrt{x^2+1}}$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Câu 15. **[2H1-3.2-2]** Một khối chóp tam giác có đường cao bằng $10cm$ và các cạnh đáy bằng $20cm, 21cm, 29cm$. Thể tích của khối chóp đó bằng

A. $700cm^3$. **B.** $2100cm^3$. **C.** $20\sqrt{35}cm^3$. **D.** $700\sqrt{2}cm^3$.

Lời giải

Tác giả: Phan Thanh Lộc ; Fb: Phan Thanh Lộc

Phản biện: Nguyễn Yến Phương ; Fb: Yenphuong Nguyen

Chọn A

Diện tích tam giác có các cạnh bằng $20cm, 21cm, 29cm$ là:

$S=\sqrt{p.(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{35.(35-20).(35-21).(35-29)}=210$

với $p=\dfrac{20+21+29}{2}=35$

Thể tích của khối chóp tam giác đã cho là:

$V=\dfrac{1}{3}.S.h=\dfrac{1}{3}.210.10=700\ \left(cm^3\right)$

Câu 16. **[2D3-2.2-2]** Giả sử $\int\limits_1^{16} f(x)dx=2020$, khi đó giá trị của $\int\limits_1^{2} x^3 f\left(x^4\right)dx$ bằng

A. 2020^4. **B.** $\sqrt[4]{2020}$. **C.** 8080. **D.** 505.

Lời giải

Tác giả: Phan Thanh Lộc ; Fb: Phan Thanh Lộc

Phản biện: Nguyễn Yến Phương ; Fb: Yenphuong Nguyen

Chọn D

Ta có: $I=\int_1^2 x^3 f\left(x^4\right)dx$

Đặt $t=x^4 \Rightarrow dt=4x^3dx \Rightarrow x^3dx=\frac{dt}{4}$. Đổi cận: $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=1 \\ x=2 \Rightarrow t=16 \end{cases}$

$I=\int_1^2 x^3 f\left(x^4\right)dx=\frac{1}{4}\int_1^{16} f(t)dt=\frac{1}{4}.\int_1^{16} f(x)dx=\frac{1}{4}.2020=505$

Câu 17. **[2D2-3.2-2]** Cho các số thực dương a, b, c thỏa $a^{\log_3 7}=27$, $b^{\log_7 11}=49$, $c^{\log_{11} 25}=\sqrt{11}$. Tính giá trị biểu thức $S=\sqrt[3]{a^{(\log_3 7)^2}}+\sqrt{b^{(\log_7 11)^2}}+c^{(\log_{11} 25)^2}$.

A. $S=25$. **B.** $S=20$. **C.** $S=22$. **D.** $S=23$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Yên Phương; Fb: Yenphuong Nguyen

Phản biện: Nguyễn Thị Hồng Loan; Fb: Nguyễn Loan

Chọn D

$\sqrt[3]{a^{(\log_3 7)^2}}=\sqrt[3]{\left(a^{\log_3 7}\right)^{\log_3 7}}=\sqrt[3]{27^{\log_3 7}}=\sqrt[3]{\left(3^{\log_3 7}\right)^3}=7.$

$\sqrt{b^{(\log_7 11)^2}}=\sqrt{\left(b^{\log_7 11}\right)^{\log_7 11}}=\sqrt{49^{\log_7 11}}=\sqrt{\left(7^{\log_7 11}\right)^2}=11.$

$c^{(\log_{11} 25)^2}=\left(c^{\log_{11} 25}\right)^{\log_{11} 25}=\left(\sqrt{11}\right)^{\log_{11} 25}=\sqrt{11^{\log_{11} 25}}=\sqrt{25}=5.$

Vậy $S=7+11+5=23$.

Câu 18. **[2H2-2.2-2]** Một khối cầu ngoại tiếp khối lập phương. Tỉ số thể tích giữa khối cầu và khối lập phương là

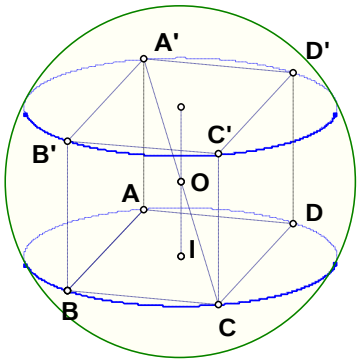
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{3\pi\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Yên Phương; Fb: Yenphuong Nguyen

Phản biện: Nguyễn Thị Hồng Loan; Fb: Nguyễn Loan

Chọn C



Khối cầu ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh 1đơn vị có đường kính là $A'C=\sqrt{3}$.

Thể tích khối cầu: $V_1=\frac{4}{3}\pi.R^3=\frac{4}{3}\pi.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$ (đơn vị thể tích).

Thể tích khối lập phương: $V_2=1$(đơn vị thể tích).

Tỉ số thể tích giữa khối cầu và khối lập phương là $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$.

Câu 19. **[0D4-5.2-2]** Cho hai số thực x,y thay đổi và thỏa mãn: $(x-4)^2+(y-4)^2+2xy\le 32$. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $x+y$ bằng:

A. 0 . **B.** 4 . **C.** 8 . **D.** 12 .

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Hồng Loan ; Fb: Nguyễn Loan

Giáo viên phản biện:Mai Đình Kế ; Fb: Tương Lai

Chọn C

$(x-4)^2+(y-4)^2+2xy\le 32\Leftrightarrow (x+y)^2-8(x+y)\le 0\Leftrightarrow 0\le (x+y)\le 8.$

Vậy $(x+y)$ đạt giá trị nhỏ nhất là 0 và giá trị lớn nhất là 8. Do đó tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $(x+y)$ là 8.

Luôn tồn tại giá trị $x;y$ để $(x+y)$ đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất. Ví dụ khi $x=y=0$ tổng $(x+y)$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi $x=y=4$ thì tổng $(x+y)$ đạt giá trị lớn nhất và thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 20. **[2H3-1.1-2]** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(1;1;1), N(-1;-1;0), P(3;1;-1)$. Tìm tọa độ điểm I thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho I cách đều ba điểm M, N, P.

A. $I(2;1;0)$. **B.** $I\left(-\frac{7}{4};2;0\right)$. **C.** $I\left(2;\frac{7}{4};0\right)$. **D.** $I\left(2;-\frac{7}{4};0\right)$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Hồng Loan ; Fb: Nguyễn Loan.

Giáo viên phản biện:Mai Đình Kế ; Fb: Tương Lai.

Chọn D

Gọi tọa độ điểm $I(a;b;0)$. Ta có:

$\overrightarrow{IM}(1-a;1-b;1)$, $\overrightarrow{IN}(-1-a;-1-b;0)$, $\overrightarrow{IP}(3-a;1-b;-1)$.

Theo giả thiết có: $IM = IN = IP$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} IM = IN \\ IM = IP \end{cases}$. Khi đó ta có hệ:

$$\begin{cases} (1-a)^2+(1-b)^2+1=(1+a)^2+(1+b)^2 \\ (1-a)^2+(1-b)^2+1=(3-a)^2+(1-b)^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+4b=1 \\ 4a=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-\frac{7}{4} \end{cases}.$$

Do đó tọa độ điểm $I(2;-\frac{7}{4};0)$.

Câu 21. **[2H2-1.2-2]** Cho hình trụ (T) có hai hình tròn đáy là (O) và (O'). Xét hình nón (N) có đỉnh O', đáy là hình tròn (O) và đường sinh hợp với đáy một góc α. Biết tỉ số giữa diện tích xung quanh hình trụ (T) và diện tích xung quanh hình nón (N) bằng $\sqrt{3}$. Tính số đo góc α.

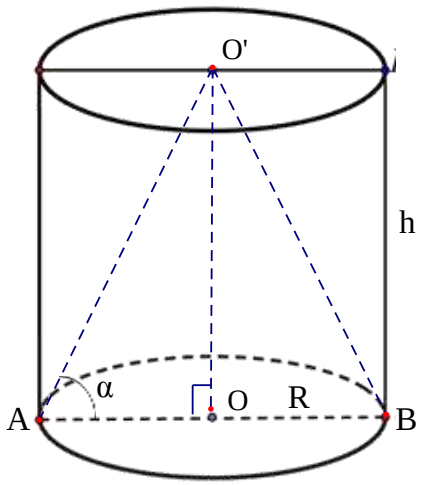
A. $\alpha = 45^0$. **B.** $\alpha = 60^0$. **C.** $\alpha = 30^0$. **D.** $\alpha = 75^0$.

Lời giải

Tác giả: Mai Đình Kế; Fb: Tương Lai.

Phản biện: Phạm Ngọc Hưng; Fb: Hưng Phạm Ngọc.

Chọn B



Giả sử hình trụ (T) có chiều cao h, bán kính đáy R.

Khi đó (T) có $S_{xq(tru)} = 2\pi Rh$.

Theo giả thiết đường sinh hợp với đáy một góc α : $O'AO = \alpha \Rightarrow O'A = \dfrac{h}{\sin\alpha}$.

Diện tích xung quanh hình nón (N): $S_{xq(non)} = \pi Rl = \pi R\dfrac{h}{\sin\alpha}$.

Tỉ số giữa diện tích xung quanh hình trụ (T) và diện tích xung quanh hình nón (N) bằng $\sqrt{3}$

Suy ra: $\dfrac{S_{xq(tru)}}{S_{xq(non)}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \dfrac{2\pi Rh.\sin\alpha}{\pi Rh} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \alpha = 60^0$.

Câu 22. **[2H1-3.3-1]** Trên ba cạnh OA, OB, OC của khối chóp $O.ABC$ lần lượt lấy các điểm A', B', C' sao cho $2OA' = OA$, $4OB' = OB$ và $3OC' = OC$. Tỉ số thể tích giữa hai khối chóp $O.A'B'C'$ và $O.ABC$ là

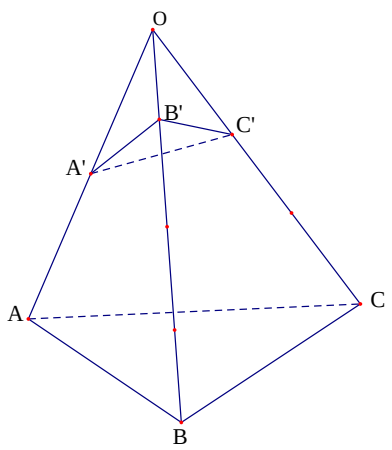
A. $\dfrac{1}{12}$. **B.** $\dfrac{1}{24}$. **C.** $\dfrac{1}{32}$. **D.** $\dfrac{1}{16}$.

Lời giải

Tác giả: Mai Đình Kế; Fb: Tương Lai.

Phản biện: Phạm Ngọc Hưng; Fb: Hưng Phạm Ngọc.

Chọn B



Áp dụng công thức tính tỉ số thể tích của khối chóp đáy tam giác ta có:

$$\frac{V_{O.A'B'C'}}{V_{O.ABC}}=\frac{OA'}{OA}.\frac{OB'}{OB}.\frac{OC'}{OC}=\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{3}=\frac{1}{24}.$$

Câu 23. **[2D3-3.7-2]** Cho số thực a và hàm số $f(x)=\begin{cases}2x & \text{khi } x\le 0\\ a\left(x-x^2\right) & \text{khi } x>0.\end{cases}$ Tính $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{a}{6}-1.$ **B.** $\frac{2a}{3}+1.$ **C.** $\frac{a}{6}+1.$ **D.** $\frac{2a}{3}-1.$

Lời giải

Tác giả:Phạm Ngọc Hưng; Fb: Hưng Phạm Ngọc

Phản biện: FB: Duc Minh

Chọn A

Ta có

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0} 2x\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} a\left(x-x^2\right)\mathrm{d}x=x^2\Big|_{-1}^{0}+a\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{0}^{1}$$

$$=-1+a\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=-1+\frac{a}{6}=\frac{a}{6}-1$$

Câu 24. **[2D2-3.2-2]** Cho $\log_5 7=a$ và $\log_5 4=b$. Biểu diễn $\log_5 560$ dưới dạng $\log_5 560=m.a+n.b+p$, với m, n, p là các số nguyên. Tính $S=m+n.p$.

A. $S=3.$ **B.** $S=4.$ **C.** $S=2.$ **D.** $S=5.$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Minh Đức; Fb: Duc Minh

Phản biện: Nguyễ Thị Hạnh, Fb: Hạnh Nguyễn

Chọn A

Ta có : $\log_5 560=\log_5\left(4^2.5.7\right)=\log_5 4^2+\log_5 5+\log_5 7=2\log_5 4+1+\log_5 7=a+2b+1.$

Suy ra $m=1,\ n=2,\ p=1$.

Do đó $S=1+2.1=3$.

Câu 25. **[2D1-5.6-1]** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+x-3$ tại điểm có hoành độ bằng -1 là

A. $y=x+4$. **B.** $y=x-4$. **C.** $y=9x+4$.

D. $y=-7x-12$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Hạnh ; Fb: Hạnh nguyễn

Phản biện: Điệp Nguyễn

Chọn B

+) Ta có $y=x^4-2x^2+x-3 \Rightarrow y'=4x^3-4x+1 \Rightarrow y'(-1)=1$ và $y(-1)=-5$

+) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+x-3$ tại điểm có hoành độ bằng -1

là $y=y'(-1).(x+1)+y(-1) \Leftrightarrow y=x+1-5 \Leftrightarrow y=x-4$.

Câu 26. **[2D1-4.1-2]** Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{9x^2-4}+2x^2+1}{x^2-3x}$ là

A. 2. **B.** 4 . **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Tác giả:Nguyễn Hoàng Điệp ; Fb: Điệp Nguyễn

Phản biện: Tăng Duy Hùng; Fb: Tăng Duy Hùng

Chọn A

TXĐ: $\left(-\infty;-\dfrac{2}{3}\right]\cup\left[\dfrac{2}{3};+\infty\right)\setminus\{3\}$

Ta có:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{9}{x^2}-\dfrac{4}{x^4}}+2+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{3}{x}}=2 \Rightarrow$ đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$\lim\limits_{x\to 3} y=\infty$; $\lim\limits_{x\to 0} y$ không tồn tại $\Rightarrow$ đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là đường thẳng $x=3$

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận

Câu 27. **[1D2-2.1-1]** Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn, có 3 chữ số đôi một khác nhau được lấy từ các số $1,2,3,4,5,6$.

A. 180. **B.** 720. **C.** 60. **D.** 120

Lời giải

Tác giả: Tăng Duy Hùng; Fb: Tăng Duy Hùng

Phản biện: Hoàng Điệp Phạm; Fb: Hoàng Điệp Phạm

Chọn C

Gọi số tự nhiên cần lập có dạng: $\overline{abc}$.

Vì c là số chẵn nên c có 3 cách chọn từ các số $\{2,4,6\}$

Số cách chọn a,b là : A_5^2

Vậy số tự nhiên chẵn thỏa mãn bài toán là: $3.A_5^2=60$

Câu 28. **[2D1-3.1-1]** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x^3-5x^2+4x-2$ trên đoạn $[0;2]$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** $-\frac{74}{27}$. **D.** -1.

Lời giải

Tác giả: Phạm Hoàng Điệp ; Fb:Hoàng Điệp Phạm

Phản biện: Dương Hà Hải; fb: Dương Hà Hải

Chọn C

TXĐ $D=\mathbb{R}$.

+) $y'=6x^2-10x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in[0;2] \\ x=\frac{2}{3}\in[0;2] \end{array}\right.$.

Ta có: $\begin{cases} y(0)=-2 \\ y\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{26}{27} \\ y(1)=-1 \\ y(2)=2 \end{cases}$.

Vậy $\min\limits_{x\in[0;2]} y=-2$ tại $x=0$.

Câu 29. **[2D1-2.4-1]** Điều kiện cần và đủ để hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ (với a,b,c là các tham số) có ba cực trị là:

A. $ab\le 0$. **B.** $ab<0$. **C.** $ab>0$. **D.** $ab\ge 0$.

Lời giải

Tác giả: Dương Hà Hải ; Fb: Dương Hà Hải.

Phản biện: Lê Xuân Hưng; Fb: Hưng Xuân Lê

Chọn B

Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$.

Để hàm số có ba cực trị thì phương trình $y' = 0$ phải có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2ax^2 + b = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 0. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $ab < 0$.

Câu 30. **[1D3-3.3-2]** Cho cấp số cộng u_n có $u_1 = -1$ và $u_5 = 9$. Tìm u_3.

A. $u_3 = 4$. **B.** $u_3 = 3$. **C.** $u_3 = 5$. **D.** $u_3 = 6$.

Lời giải

Tác giả: Lê Xuân Hưng ; PB:Hưng Lê Xuân

Phản biện: Nguyễn Hoạch ; PB: Nguyễn Hoạch

Chọn A

Do dãy u_n là cấp số cộng nên $u_5 = u_1 + 4d \Leftrightarrow d = \frac{u_5 - u_1}{4} \Leftrightarrow d = \frac{5}{2}$.

Suy ra $u_3 = u_1 + 2d = -1 + 2.\frac{5}{2} = 4$.

Vậy $u_3 = 4$.

Câu 31. **[2D2-5.5-3]** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-8; +\infty)$ để phương trình sau có nhiều hơn hai nghiệm phân biệt?

$$x^2 + x(x-1)2^{x+m} + m = (2x^2 - x + m).2^{x-x^2}.$$

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 8.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Đức Hoạch, Fb: Hoạch Nguyễn

Phản biện: Nguyễn Văn Mạnh, FB: Nguyễn Văn Mạnh

Chọn B

Ta có:

$$x^2 + x(x-1)2^{x+m} + m = (2x^2 - x + m).2^{x-x^2} \Leftrightarrow \frac{(x^2 + m) + x(x-1)2^{x+m}}{2^{x-x^2}} = 2x^2 - x + m$$

$\Leftrightarrow \left(x^2+m\right).2^{x^2-x}+\left(x^2-x\right).2^{x^2+m}=2x^2-x+m$

$\Leftrightarrow \left(x^2+m\right).2^{x^2-x}+\left(x^2-x\right).2^{x^2+m}=\left(x^2-x\right)+\left(x^2+m\right)$

$\Leftrightarrow \left(x^2+m\right).\left(2^{x^2-x}-1\right)+\left(x^2-x\right).\left(2^{x^2+m}-1\right)=0 \quad (*)$

• TH1: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+m>0\\x^2-x>0\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+m<0\\x^2-x<0\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^{x^2+m}>1\\2^{x^2-x}>1\end{cases}\\ \begin{cases}0<2^{x^2+m}<1\\0<2^{x^2-x}<1\end{cases}\end{array}\right.$ nên $VT(*)>0$.

• TH2: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+m>0\\x^2-x<0\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+m<0\\x^2-x>0\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^{x^2+m}>1\\0<2^{x^2-x}<1\end{cases}\\ \begin{cases}0<2^{x^2+m}<1\\2^{x^2-x}>1\end{cases}\end{array}\right.$ nên $VT(*)<0$.

• TH3: $\left[\begin{array}{l}x^2+m=0 \quad (1)\\x^2-x=0 \quad (2)\end{array}\right.$ thì $(*)$ thỏa mãn.

Ta thấy, phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt là $x=0$ và $x=1$.

Để phương trình đã cho có nhiều hơn 2 nghiệm thì phương trình (1) có nghiệm khác 0 và 1.

$\Leftrightarrow m<0$. Mà $m\in\mathbb{Z}$, $m\in(-8;+\infty)$ nên $m\in\{-7;-6;...-1\}$ nên có 7 giá trị thỏa mãn.

Câu 32 **[2H2-2.7-3].** Trong không gian cho tam giác ABC có $AB=2R, AC=R, CAB=120°$. Gọi M là điểm thay đổi thuộc mặt cầu tâm B, bán kính R. Giá trị nhỏ nhất của $MA+2MC$ là

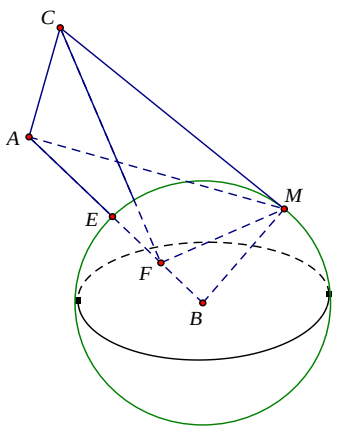
A. $4R$. **B.** $6R$. **C.** $R\sqrt{19}$. **D.** $2R\sqrt{7}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Mạnh ; Fb: Nguyễn Văn Mạnh

Phản biện: Trần Thanh Sơn; Fb: Trần Thanh Sơn

Chọn C



Gọi E là giao điểm của AB với mặt cầu $S(B;R)$ và F là trung điểm của EB ta có E là trung điểm của AB, $BE = BM = R$.

ΔAFC có $FC^2 = AC^2 + AF^2 - 2AC.AF.\cos CAB = R^2 + \left(\frac{3R}{2}\right)^2 - 2.R.\frac{3R}{2}.\cos 120° = \frac{19R^2}{4}$

$\Rightarrow FC = \frac{R\sqrt{19}}{2}$

Xét hai tam giác BFM và BMA có:

$\begin{cases} ABM \text{ chung} \\ \frac{BF}{BM} = \frac{BM}{BA} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \Delta BFM \sim \Delta BMA \Rightarrow \frac{MA}{FM} = \frac{AB}{MB} = 2 \Rightarrow MA = 2MF$

Khi đó $MA + 2MC = 2(MF + MC) \geq 2FC = 2.\frac{R\sqrt{19}}{2} \Rightarrow MA + 2MC \geq R\sqrt{19}$

Vì F nằm trong mặt cầu (S) và C nằm ngoài mặt cầu (S) nên dấu "=" xảy ra khi M là giao điểm của FC và (S), do đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA + 2MC$ là $R\sqrt{19}$.

Câu 33 . Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = x(x^2-1)\sqrt{x^2+3}$. Giả sử a,b là hai số thực thay đổi sao cho $a < b \leq 1$. Giá trị nhỏ nhất của $f(a) - f(b)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}-64}{15}$. **B.** $\frac{33\sqrt{3}-64}{15}$. **C.** $-\frac{\sqrt{3}}{5}$. **D.** $-\frac{11\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải

Tác giả: Trần Thanh Sơn ; Fb: Trần Thanh Sơn

Phản biện: Đỗ Hữu Nhân; Fb: Do Huu Nhan

Chọn B

Ta có $y' = f'(x) = x(x^2-1)\sqrt{x^2+3}$ suy ra $y = f(x) = \int x(x^2-1)\sqrt{x^2+3}dx$.

Đặt $t = \sqrt{x^2+3} \Rightarrow t^2 - 3 = x^2 \Rightarrow xdx = tdt$. Suy ra

$\int x\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2+3}\mathrm{d}x=\int\left(t^2-4\right)t^2\mathrm{d}t=\int\left(t^4-4t^2\right)\mathrm{d}t=\frac{t^5}{5}-\frac{4}{3}t^3+C$, với C là hằng số.

Từ đó $f(x)=\frac{\left(x^2+3\right)^2\sqrt{x^2+3}}{5}-\frac{4\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+3}}{3}+C$. Đây là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $f'(x)=0\Leftrightarrow x\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2+3}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có nhận xét:

- Trên khoảng $(-\infty;-1)$ hàm số nghịch biến, do đó với $a<b<-1\Rightarrow f(a)>f(b)$ nên $f(a)-f(b)>0$.
- Xét trên đoạn $[-1;1]$, ta có $\begin{cases}\min\limits_{x\in[-1;1]}f(x)=f(-1)=f(1)\\\max\limits_{x\in[-1;1]}f(x)=f(0)\end{cases}$. Để $f(a)-f(b)$ đạt GTNN thì $f(a)$ đạt min và $f(b)$ đạt max. Do đó $\begin{cases}a=-1\\b=0\end{cases}$, vì $a<b\le1$.

Hay giá trị nhỏ nhất của $f(a)-f(b)$ bằng

$$f(-1)-f(0)=\left(\frac{16.2}{5}-\frac{16.2}{3}\right)-\left(\frac{9\sqrt{3}}{5}-\frac{12\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{33\sqrt{3}-64}{15}<0.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(a)-f(b)$ bằng $\frac{33\sqrt{3}-64}{15}$.

Câu 34. **[2H3-1.3-2]** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(5;3;1)$, $B(4;-1;3)$, $C(-6,2,4)$ và $D(2;1;7)$. Biết rằng tập hợp các điểm M thỏa $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$ là một mặt cầu (S). Xác định tọa độ tâm I và tính bán kính R của mặt cầu (S).

A. $I\left(\frac{4}{3};1;\frac{2}{3}\right),R=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

B. $I\left(\frac{1}{3};\frac{14}{3};\frac{2}{3}\right),R=\frac{\sqrt{21}}{3}$.

C. $I\left(1;\frac{14}{3};\frac{8}{3}\right),R=\frac{\sqrt{21}}{3}$.

D. $I\left(\frac{8}{3};\frac{10}{3};\frac{1}{3}\right),R=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Tác giả: Đỗ Hữu Nhân ; Fb: Do Huu Nhan

Phản biện: Nguyễn Xuân Giao ; Fb: Giao Nguyen

Chọn C

Gọi $M(x,y,z)$.

$3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=(3-3x;14-3y;8-3z)$

$\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$

$\Leftrightarrow 9(x-1)^2+(3y-14)^2+(3z-8)^2=21$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+\left(y-\frac{14}{3}\right)^2+\left(z-\frac{8}{3}\right)^2=\frac{21}{9}$

Vậy tập hợp các điểm M là một mặt cầu (S) có tâm $I\left(1;\frac{14}{3};\frac{8}{3}\right)$ và bán kính $R=\frac{\sqrt{21}}{3}$.

Câu 35. **[2D1-5.7-2]** Tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x+1-m^2$ có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ là

A. $(-\infty;-1)\cup(0;1)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-1;0)\cup(1;+\infty)$.

Lời giải

Nguyễn xuân Giao; giaonguyen

Vũ Ngọc Tân; Vũ Ngọc Tân

Chọn A

Giả sử A,B là hai điểm phân biệt trên đồ thị đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

Gọi $A\left(a;a^3-3ma^2+3(m^2-1)a+1-m^2\right)\Rightarrow B\left(-a;-a^3+3ma^2-3(m^2-1)a-1+m^2\right)$

Do điểm B thuộc đồ thị nên

$-a^3+3ma^2-3(m^2-1)a-1+m^2=-a^3-3ma^2-3(m^2-1)a+1-m^2$

$\Leftrightarrow 3ma^2=1-m^2$ (*)

Để trên đồ thị có hai điểm phân biệt đối xứng qua gốc tọa độ khi (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow m(1-m^2)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\0<m<1\end{array}\right.$.

Câu 36. **[2H1-3.4-3]** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có góc giữa mặt bên và mặt đáy (ABC) bằng $60°$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\frac{3a\sqrt{7}}{14}$, tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

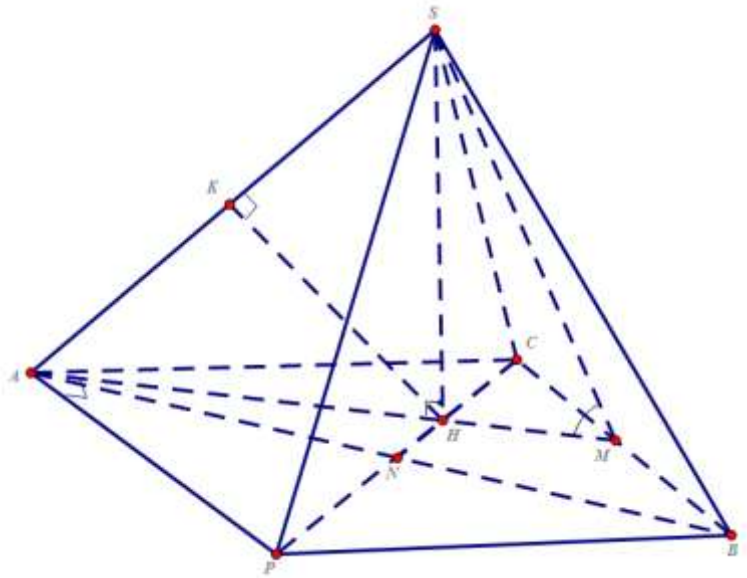
A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải

Tác giả: Vũ Ngọc Tân ; Fb: Vũ Ngọc Tân.

Phản biện: Lê Mai Hương; Fb: Le Mai Huong.

Chọn D



Dựng $SH\perp(ABC)$, mà $S.ABC$ là hình chóp đều nên H là trọng tâm ΔABC, gọi M,N lần lượt là trung điểm của BC,AB.

Theo giả thiết thì $SMA=60°$, khi đó ta đặt $AB=AC=BC=x$ nên $AM=\frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Ta có : $SH=\tan 60°.HM=\tan 60°.\frac{1}{3}AM=\sqrt{3}.\frac{1}{3}.\frac{x\sqrt{3}}{2}=\frac{x}{2}$, $AH=\frac{x}{\sqrt{3}}$.

Dựng hình bình hành $ACBP$, khi đó

$$d(BC,SA)=d(BC,(SAP))=d(M,(SAP))=\frac{3}{2}d(H,(SAP))$$

$$\Leftrightarrow d(H,(SAP))=\frac{2}{3}d(BC,AB)=\frac{2}{3}.\frac{3a\sqrt{7}}{14}=\frac{a}{\sqrt{7}}.$$

Vì ΔHAP vuông tại A, nên ta dựng $HK\perp SA$ do đó $d(H,(SAP))=HK=\frac{a}{\sqrt{7}}$.

Khi đó ta được : $\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{AH^2}+\frac{1}{SH^2}\Rightarrow\frac{7}{a^2}=\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^2}$ nên $x=a$.

Vậy $SH=a$, $S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, nên $V_{SABC}=\frac{1}{3}.SH.S_{ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 37. **[2D3-4.4-3]** Cho hàm số $f\ \ x$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_{-2}^{2} f\ \ \sqrt{x^2+5}-x\ \ \mathrm{dx}=1$, $\int\limits_{1}^{5}\frac{f\ \ x}{x^2}\mathrm{dx}=3$. Tính $\int\limits_{1}^{5} f\ \ x\ \ \mathrm{dx}$.

A. -15. **B.** -2. **C.** -13. **D.** 0.

Lời giải

Tác giả: Lê Mai Hương; Fb:Le Mai Huong

Phản biện: Dương Chiến; Fb: Dương Chiến

Chọn C

Ta có $\int\limits_{-2}^{2} f\ \ \sqrt{x^2+5}-x\ \ \mathrm{dx}=1$.

Đặt $t=\sqrt{x^2+5}-x$ $*$

Từ $*$ dễ thấy $t>0$ và $t\in 1;5$, với $\forall x\in -2;2$.

Khi đó $*\Leftrightarrow t+x=\sqrt{x^2+5}\Leftrightarrow t^2+2tx=5\Leftrightarrow x=\frac{5}{2t}-\frac{t}{2}$

$\Leftrightarrow \mathrm{dx}=-\left(\frac{5}{2t^2}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{dt}$.

Đổi cận $x=2\Rightarrow t=1; x=-2\Rightarrow t=5$.

Do đó $1=\int\limits_{1}^{5}\left(\frac{5}{2t^2}+\frac{1}{2}\right)f\ \ t\ \ \mathrm{dt}=\frac{5}{2}\int\limits_{1}^{5}\frac{f\ \ t}{t^2}\mathrm{dt}+\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{5} f\ \ t\ \ \mathrm{dt}$

$=\frac{15}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{5} f\ \ x\ \ \mathrm{dx}$.

Vậy $\int\limits_{1}^{5} f\ \ x\ \ \mathrm{dx}=-13$.

Câu 38. **[2H1-3.3-3]** Cho hình chóp tứ giác đều có độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $2a$. Tính theo a thể tích của khối đa diện có các đỉnh là trung điểm các cạnh của hình chóp đã cho.

A. $\frac{5a^3}{24}$. **B.** $\frac{5a^3}{12}$. **C.** $\frac{a^3}{12}$. **D.** $\frac{3a^3}{8}$.

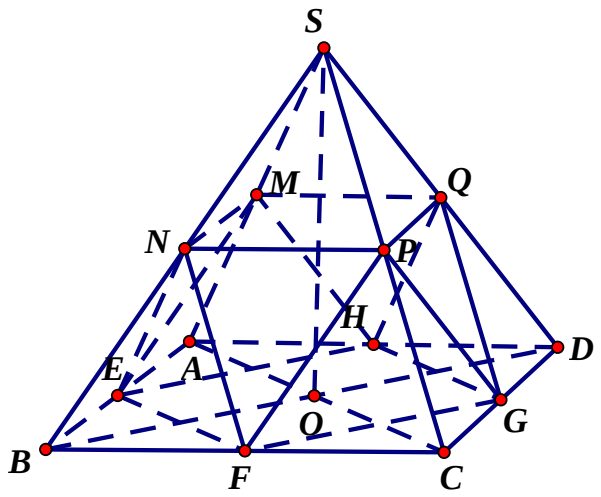
Lời giải

Tác giả: Dương Chiến; Fb: DuongChien

Phản biện:Nguyễn Văn Mộng; Fb:Nguyễn Văn Mộng

Chọn B

Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a, SO = 2a$ như hình vẽ



Gọi E, F, G, H, M, N, P, Q lần lượt là trung điểm cạnh $AB, BC, CD, DA, SA, SB, SC, SD$.

Gọi V là thể tích khối đa diện cần tính, ta có:

$V = V_{S.ABCD} - V_{S.MNPQ} - V_{BEFN} - V_{CFGP} - V_{DGHQ} - V_{AHEM} = V_{S.ABCD} - V_{S.MNPQ} - 4V_{B.EFN}$.

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}a^2.2a = \frac{2a^3}{3}; \frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{2V_{S.MNP}}{2V_{S.ABC}} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{S.MNPQ} = \frac{1}{8}V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{12}$.

$\frac{V_{B.EFN}}{V_{B.ACS}} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{B.EFN} = \frac{1}{8}V_{S.ABC} = \frac{1}{16}V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{24}$.

Vậy $V = \frac{2a^3}{3} - \frac{a^3}{12} - 4.\frac{a^3}{24} = \frac{5a^3}{12}$.

Câu 39. **[2H1-3.3-4]** Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng V. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, $B'C'$ và DD'. Thể tích khối tứ diện $C'.MNP$ bằng

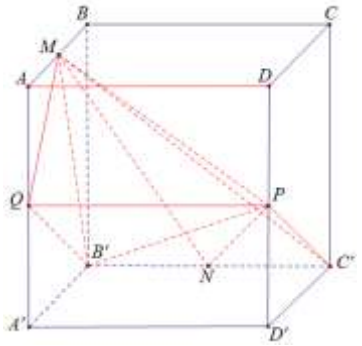
A. $\frac{V}{32}$. **B.** $\frac{V}{8}$. **C.** $\frac{V}{16}$. **D.** $\frac{V}{4}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Mộng ; Fb: Nguyễn Văn Mộng

Phản biện:Trần Đức Phương; Fb: Phuong Tran Duc

Chọn C

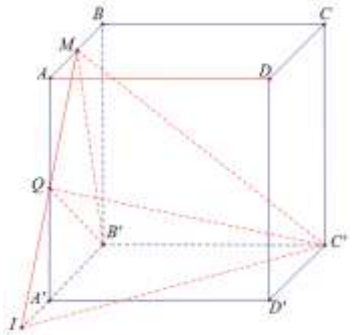


Ta có: $\dfrac{V_{C'.MNP}}{V_{C'.MB'P}}=\dfrac{C'M}{C'B'}=\dfrac{1}{2}$ (do N là trung điểm của $B'C'$) $\Rightarrow V_{C'.MNP}=\dfrac{1}{2}V_{C'.MB'P}$ (1)

Gọi Q là trung điểm của AA'. Khi đó, tứ giác $C'B'QP$ là hình bình hành.

Do đó, $V_{C'.MB'P}=\dfrac{1}{2}V_{M.C'B'QP}=V_{M.C'B'Q}$ (2)

Trong $(ABB'A')$, gọi $I=MQ\cap A'B'\Rightarrow$ Q là trung điểm của MI.



$\dfrac{V_{M.C'B'Q}}{V_{M.C'B'I}}=\dfrac{MQ}{MI}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow V_{M.C'B'Q}=\dfrac{1}{2}V_{M.C'B'I}$ (3)

Ta lại có, $S_{\Delta C'B'I}=\dfrac{1}{2}.B'I.\mathrm{d}(C',A'B')$ và $S_{A'B'C'D'}=B'A'.\mathrm{d}(C',A'B')$

Suy ra, $\dfrac{S_{\Delta C'B'I}}{S_{A'B'C'D'}}=\dfrac{\frac{1}{2}.B'I.\mathrm{d}(C',A'B')}{B'A'.\mathrm{d}(C',A'B')}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow S_{\Delta C'B'I}=\dfrac{3}{4}.S_{A'B'C'D'}$

Gọi $h=\mathrm{d}(M,(A'B'C'D'))$

$V_{M.C'B'I}=\dfrac{1}{3}.S_{\Delta C'B'I}.h=\dfrac{1}{3}.\dfrac{3}{4}.S_{A'B'C'D'}.h=\dfrac{1}{4}.S_{A'B'C'D'}.h=\dfrac{1}{4}.V$ (4)

Từ (1), (2), (3) và (4) ta suy ra $V_{C'.MNP}=\dfrac{1}{16}V$

Câu 40. Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\left|\tan^4 x-\dfrac{2}{\cos^2 x}\right|=m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ là

A. $m=3$ **B.** $2<m<3$ **C.** $2\le m\le 3$ **D.** $m=2$

Lời giải

Tác giả: Trần Đức Phương; Fb: Phuong Tran Duc.

Phản biện: Tuấn Minh; Fb: Tuấn Minh

Chọn B

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

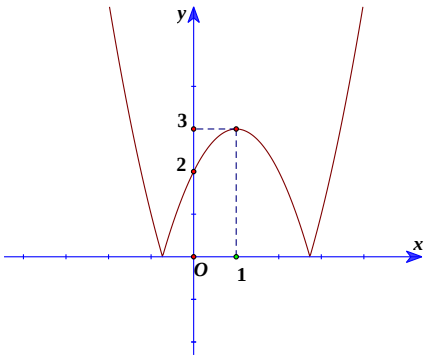
Ta có: $\left|\tan^4 x - \frac{2}{\cos^2 x}\right| = m \Leftrightarrow \left|\tan^4 x - 2\tan^2 x - 2\right| = m$ (*)

Đặt $t = \tan^2 x$, $t \geq 0$. Khi đó (*) trở thành: $\left|t^2 - 2t - 2\right| = m$.

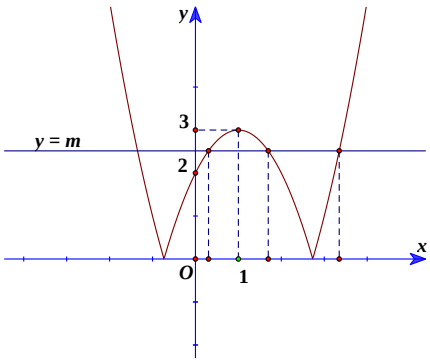
Nhận xét:

- Với $t = 0$ thì phương trình đã cho có 1 nghiệm $x = 0$.
- Với mỗi $t > 0$ thì phương trình đã cho có 2 nghiệm x phân biệt thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- Với mỗi $t < 0$ thì phương trình đã cho không tồn tại nghiệm x.

Đồ thị của hàm số $y = \left|t^2 - 2t - 2\right|$:



Dựa vào đồ thị, phương trình $\left|\tan^4 x - \frac{2}{\cos^2 x}\right| = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = \left|t^2 - 2t - 2\right|$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn 0. Lúc đó: $2 < m < 3$.



Câu 41. **[2D2-5.5-4]** Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $3^{x^2-2x+1-2|x-m|}=\log_{x^2-2x+3}\left(2|x-m|+2\right)$ có đúng ba nghiệm phân biệt:

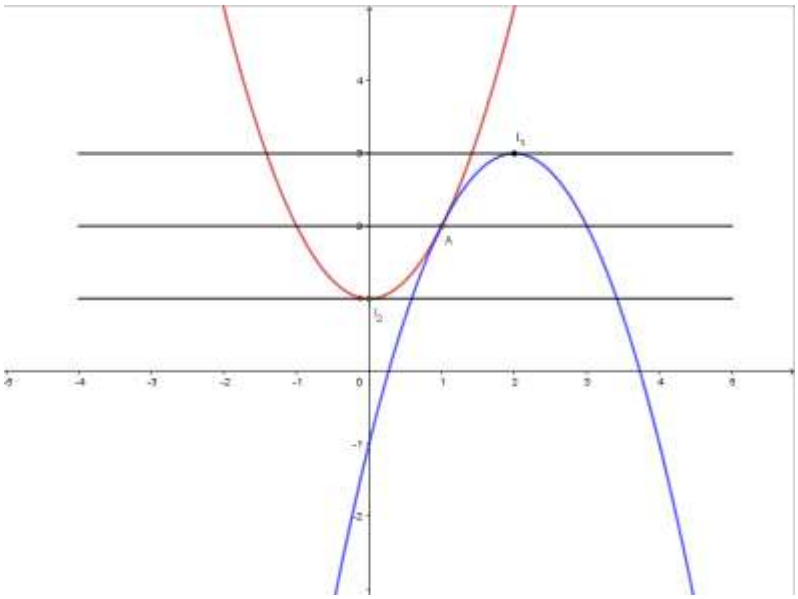
A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Tác giả:Nguyễn Trần Tuấn Minh ; Fb: Tuấn Minh

Phản biện: Bùi Dũng ; Fb: Bùi Dũng

Chọn B



Ta có:

$$3^{x^2-2x+1-2|x-m|}=\log_{x^2-2x+3}\left(2|x-m|+2\right)\Leftrightarrow\frac{3^{x^2-2x+3}}{3^{2|x-m|+2}}=\frac{\ln\left(2|x-m|+2\right)}{\ln\left(x^2-2x+3\right)}$$

$$\Leftrightarrow 3^{x^2-2x+3}.\ln\left(x^2-2x+3\right)=3^{2|x-m|+2}.\ln\left(2|x-m|+2\right)$$

(1)

Xét hàm số $g(t)=3^t.\ln t$ trên $(2;+\infty)$.

Có $g'(t)=3^t.\ln 3.\ln t+3^t.\frac{1}{t}>0\quad\forall t\in(2;+\infty)$, nên $g(t)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Do đó phương trình (1) tương đương:

$$g\left(x^2-2x+3\right)=g\left(2|x-m|+2\right)\Leftrightarrow x^2-2x+3=2|x-m|+2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+1=2m\\-x^2+4x-1=2m\end{array}\right.$$

(2)

Xét hai Parabol: $(P_1): y=x^2+1$ có đỉnh $I_1(0;1)$ và bề lõm hướng lên.

$(P_2): y=-x^2+4x-1$ có đỉnh $I_2(2;3)$ và bề lõm hướng xuống.

Và dễ thấy hai Parabol tiếp xúc nhau tại điểm $A(1;2)$.

Vậy: (1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Đường thẳng nằm ngang $y=2m$ hoặc đi qua $I_1(0;1)$, hoặc đi qua $I_2(2;3)$, hoặc đi qua $A(1;2)$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m=1 \\ 2m=3 \\ 2m=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow m\in\left\{\frac{1}{2};\frac{3}{2};1\right\}$. Vậy tổng tất cả các giá trị m thỏa đề là 3.

Câu 42. **[2D4-5.1-1]** Cho phương trình $25^{1+\sqrt{1-x^2}}-(m+2).5^{1+\sqrt{1-x^2}}+2m+1=0$, với m là tham số. Giá trị nguyên dương lớn nhất của tham số m để phương trình có nghiệm là

A. 5. **B.** 26. **C.** 25. **D.** 6.

Lời giải

Tác giả: face - Bùi Dũng

Phản biện: face – Euro Vũ

Chọn C

Đặt: $5^{1+\sqrt{1-x^2}}=t$

Ta có: $1\le 1+\sqrt{1-x^2}\le 2 \Rightarrow 5\le 5^{1+\sqrt{1-x^2}}\le 25 \Rightarrow t\in[5;25]$

Khi đó phương trình trở thành: $t^2-(m+2).t+2m+1=0$

$$\Leftrightarrow t^2-mt-2t+2m+1=0 \Leftrightarrow t^2-2t+1=m(t-2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2-2t+1}{t-2}=m$$

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của hai đồ thị hàm số:

$$\begin{cases} y=\dfrac{t^2-2t+1}{t-2} \\ y=m \end{cases}$$

Xét hàm số: $y=\dfrac{t^2-2t+1}{t-2}$ liên tục trên $[5;25]$, có: $y'=\dfrac{t^2-4t+3}{(t-2)^2}>0\ \forall t\in[5;25]$

Để phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow \min_{[5;25]} y\le m\le \max_{[5;25]} y \Leftrightarrow y(5)\le m\le y(25) \Leftrightarrow \frac{16}{3}\le m\le \frac{576}{23}$$

Vì m là giá trị nguyên dương lớn nhất $\Rightarrow m=25$

Đáp án: C.

Câu 43. **[2D1-3.2-3]** Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{1+\cos x}{\cos^2 x+\cos x+1}$ .Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2M=3m$. **B.** $M-m=\dfrac{2}{3}$. **C.** $M-m=1$. **D.** $M-m=\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Tác giả: Ngô Nguyễn Anh Vũ ; Fb: Euro Vu

Phản biện:Trần Quốc An ;Fb: Tran Quoc An

Chọn C.

Đặt $t=\cos x$ $,t\in[-1;1]$

Lúc đó: $y=\dfrac{t+1}{t^2+t+1}\Rightarrow y'=\dfrac{-t^2-2t}{\left(t^2+t+1\right)^2}$

Ta có: $y'=0\Leftrightarrow -t^2-2t=0\Leftrightarrow t=0$

Hàm số $y=\dfrac{t+1}{t^2+t+1}$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$

Với $t=-1\Rightarrow y=0$

Với $t=0\Rightarrow y=1$

Với $t=1\Rightarrow y=\dfrac{2}{3}$

Giá trị lớn nhất: $M=1$ tại $t=0\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$

Giá trị nhỏ nhất $m=0$ tại $t=-1\Rightarrow x=\pi+k2\pi$

Vậy: $M-m=1$ .Chọn C.

Câu 44. **[2D1-2.2-3]** Cho hàm số $f(x)=x^3-4x^2$. Hỏi hàm số $g(x)=f(|x|-1)$ có bao nhiêu cực trị?

A. 6. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lờigiải

Tác giả:Trần Quốc An; Fb:Tran Quoc An

Phản biện: Lê Tuấn Anh

Chọn C

Nhận xét: Hàm số $g(x)=f(|x|-1)$ là hàm số chẵn nên đồ thị của nó nhận Oy làm trục đối xứng , do đó ta chỉ chỉ xét đồ thị của hàm số $g_1(x)=f(x-1)$ với $x\geq 0$ sau đó lấy đối xứng qua Oy ta được được đồ thị hàm số $g(x)=f(|x|-1)$.

Xét $g_1(x)=f(x-1)=(x-1)^3-4(x-1)^2$, với $x\ge 0$.

Ta có: $g_1'(x)=3(x-1)^2-8(x-1)$

$$g_1'(x)=0\Leftrightarrow (x-1)(3x-11)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{11}{3} \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$		$-\frac{11}{3}$		-1		0		1		$\frac{11}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{256}{27}$	↗	0	↘	-3	↗	0	↘	$-\frac{256}{27}$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $g(x)$, ta thấy hàm số $g(x)$ có 5 cực trị.

Cách 2 : Xét đồ thị hàm số $y=f(x)=x^3-4x^2$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\frac{8}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\frac{256}{27}$	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=f(x-1)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f(x)$ qua phải 1 đơn vị, ta có bảng biến thiên của đồ thị hàm số $y=f(x-1)$ như sau :

x	$-\infty$		1		$\frac{11}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\frac{256}{27}$	↗	$+\infty$

Hàm số $g(x)=f(|x|-1)$ là hàm số chẵn nên đồ thị của nó nhận trục Oy làm trục đối xứng , do đó ta chỉ cần vẽ đồ thị hàm số $y=f(x-1)$ ứng với $x\ge 0$ sau đó lấy đối xứng qua Oy ta được đồ thị hàm số $g(x)=f(|x|-1)$, ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)=f(|x|-1)$:

x	$-\infty$		$-\frac{11}{3}$		-1		0		1		$\frac{11}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{256}{27}$	↗	0	↘	-3	↗	0	↘	$-\frac{256}{27}$	↗	$+\infty$

Câu 45. **[2H3-3.8-3]** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S_1) có tâm $I_1(1;0;1)$, bán kính $R_1=2$ và mặt cầu (S_2) có tâm $I_2(1;3;5)$, bán kính $R_2=1$. Đường thẳng d thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với (S_1), (S_2) lần lượt tại A và B. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của đoạn AB. Tính $P=M.m$.

A. $P=2\sqrt{6}$. **B.** $P=8\sqrt{5}$. **C.** $P=4\sqrt{5}$. **D.** $P=8\sqrt{6}$.

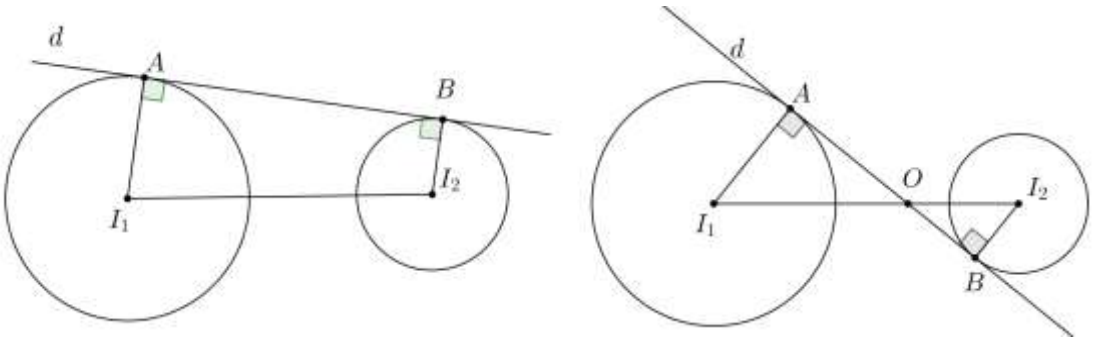
Lời giải *(theo thầy Phu Dang)*

Tác giả: Lê Tuấn Anh ; Fb:Anh Tuan Anh Le

GV phản biện:Vũ Huỳnh Đức; Fb: Vũ Huỳnh Đức

Chọn D

Ta có $I_1I_2=5>R_1+R_2=3, I_1A // I_2B$.



Ta có: $I_1I_2^2=\left(\overrightarrow{I_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI_2}\right)^2=R_1^2+AB^2+R_2^2+2\overrightarrow{I_1A}.\overrightarrow{BI_2}$

$\Rightarrow AB^2=20+2\overrightarrow{I_1A}.\overrightarrow{I_2B}=20+2.2.1.\cos\left(\overrightarrow{I_1A},\overrightarrow{I_2B}\right)$

$$\Rightarrow\begin{cases}Max\ AB=2\sqrt{6}\Leftrightarrow\overrightarrow{I_1A}\nearrow\nearrow\overrightarrow{I_2B}\\ Min\ AB=4\Leftrightarrow\overrightarrow{I_1A}\nearrow\swarrow\overrightarrow{I_2B}\end{cases}.$$

Vậy $M.m=8\sqrt{6}$

Câu 46. **[2D1-2.15-3]** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^4+4mx^3+3(m+1)x^2+1$ có cực tiểu mà không có cực đại.

A. $m\in\left(-\infty;\dfrac{1-\sqrt{7}}{3}\right]$. **B.** $m\in\left[\dfrac{1-\sqrt{7}}{3};1\right]\cup\{-1\}$.

C. $m\in\left[\dfrac{1+\sqrt{7}}{3};+\infty\right)$. **D.** $m\in\left[\dfrac{1-\sqrt{7}}{3};\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\right]\cup\{-1\}$.

Lời giải

Tác giả: Vũ Huỳnh Đức; Fb: Vũ Huỳnh Đức.

Phản biện: Huong Nguyen; Fb: Huong Nguyen.

Chọn D

Tập xác định $\mathbb{R}$.

Đặt $f(x)=x^4+4mx^3+3(m+1)x^2+1$

$f'(x)=4x^3+12mx^2+6(m+1)x=2x\left[2x^2+6mx+3(m+1)\right]$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\g(x)=2x^2+6mx+3(m+1)=0\end{array}\right.$

Nhận xét:

1)Hàm số $f(x)=x^4+4mx^3+3(m+1)x^2+1$ *chỉ xảy ra hai trường hợp về cực trị*

+ Trường hợp 1*: Có 3 điểm cực trị trong đó có 2 điểm cực tiểu, 1 điểm cực đại.*

+ Trường hợp 2*: Có đúng 1 điểm cực trị, đó là điểm cực tiểu.*

2) Hàm số $f(x)$ *có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình* $f'(x)=0$ *có 3 nghiệm phân biệt.*

Do đó, ta tìm m thỏa yêu cầu đề bài theo trình tự sau

+ $f(x)$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ $f'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow$ Phương trình $2x^2+6mx+3(m+1)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=9m^2-6m-6>0\\m+1\neq 0\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow m\in(-\infty;-1)\cup\left(-1;\frac{1-\sqrt{7}}{3}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{7}}{3};+\infty\right).\ (1)$$

+ Lấy phần bù kết quả vừa tìm được ở (1):

Hàm số $f(x)$ có 1 điểm cực trị $\Leftrightarrow m\in\left[\dfrac{1-\sqrt{7}}{3};\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\right]\cup\{-1\}$.

Vậy hàm số $y=x^4+4mx^3+3(m+1)x^2+1$ có cực tiểu mà không có cực đại khi và chỉ khi $m\in\left[\frac{1-\sqrt{7}}{3};\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right]\cup\{-1\}$.

Câu 47. **[2D2-6.4-2]** So sánh ba số $a=1000^{1001}$, $b=2^{2^{64}}$ và $c=1^1+2^2+3^3+...+1000^{1000}$.

A. $c<a<b$. **B.** $b<a<c$. **C.** $c<b<a$. **D.** $a<c<b$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Thu Hương; Fb: Hương Nguyễn

Phản biện: Lê Đức Lộc; Fb: Lê Đức Lộc

Chọn A

Ta có: $1^1+2^2+3^3+...+n^n<n^{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$ (1).

Thật vậy bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được như sau:

+) Với $n=2$ bất đẳng thức (1) đúng

+) Giả sử (1) đúng đến $n=k,\ \forall k\geq 2,$ ta có $1^1+2^2+3^3+...+k^k<k^{k+1}$ (2)

Ta cần chứng minh: $1^1+2^2+3^3+...+(k+1)^{k+1}<(k+1)^{k+2}$

Từ (2) ta có: $1^1+2^2+3^3+...+k^k+(k+1)^{k+1}<k^{k+1}+(k+1)^{k+1}$

$\Leftrightarrow 1^1+2^2+3^3+...+k^k+(k+1)^{k+1}<k^{k+1}+(k+1)^{k+1}<2(k+1)^{k+1}$

Do $2\leq k\Rightarrow 2<k+1$ nên $2(k+1)^{k+1}<(k+1)^{k+2}$ ta có điều phải chứng minh.

Vậy $c=1^1+2^2+3^3+...+1000^{1000}<1000^{1001}=a$ hay $c<a$ (*).

Mặt khác

$\log a=3003$,

$\log b=2^{64}.\log 2=2^{10}.2^{50}.2^4.\log 2=\left(1024.\log 2^{16}\right).2^{50}>3003=\log a$. Vậy $b>a$.(**).

Từ (*) và (**) suy ra $c<a<b$.

Câu 48. **[2D1-1.3-4]** Cho các hàm số $f(x)=x^2-4x+m$ và $g(x)=(x^2+1)(x^2+2)^2(x^2+3)^3$. Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $g(f(x))$ đồng biến trên $(3;+\infty)$ là

A. $[3;4)$. **B.** $[0;3)$. **C.** $[4;+\infty)$. **D.** $[3;+\infty)$.

Lời giải

Tác giả: Lê Đức Lộc; Fb: Lê Đức Lộc

Phản biện: Hà Ngọc Ngô

Chọn D

$f(x)=x^2-4x+m \Rightarrow f'(x)=2x-4$.

$g(x)=(x^2+1)(x^2+2)^2(x^2+3)^3=a_{12}x^{12}+a_{10}x^{10}+...+a_2x^2+a_0$

$\Rightarrow g'(x)=12a_{12}x^{11}+10a_{10}x^9+...+2a_2x$.

$[g(f(x))]'=f'(x).g'(f(x))=(2x-4)[12a_{12}f^{11}(x)+10a_{10}f^9(x)+...+2a_2f(x)]$

$=(2x-4).f(x).[12a_{12}f^{10}(x)+10a_{10}f^8(x)+...+2a_2]$

Vì a_{12}; a_{10}; ...; a_2; $a_0>0$ và $2x-4>0\ \forall x\in(3;+\infty)$ nên

$(2x-4)[12a_{12}f^{10}(x)+10a_{10}f^8(x)+...+2a_2]>0\ \forall x\in(3;+\infty)$.

Hàm số $g(f(x))$ đồng biến trên $(3;+\infty) \Leftrightarrow [g(f(x))]'\ge 0\ \forall x\in(3;+\infty)$

$\Leftrightarrow f(x)\ge 0\ \forall x\in(3;+\infty) \Leftrightarrow x^2-4x+m\ge 0\ \forall x\in(3;+\infty) \Leftrightarrow m\ge g(x)=-x^2+4x\ \forall x\in(3;+\infty)$

$\Rightarrow m\ge \max\limits_{x\in[3;+\infty)} g(x)=3$.

Câu 49. **[2D3-2.2-4]** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập $\mathbb{R}$ và thỏa $f'(x)+2f'(-x)=\dfrac{2|x|}{x^6+x^2+1}$ với mọi số thực x. Giả sử $f(2)=m$, $f(-3)=n$. Tính giá trị biểu thức $T=f(-2)-f(3)$.

A. $T=m+n$. **B.** $T=n-m$. **C.** $T=m-n$. **D.** $T=-m-n$.

Lời giải

Tác giả: Ngô Ngọc Hà ; Fb: Hà Ngọc Ngô

Phản biện: Nguyễn Thắng.

Chọn B

Ta có $f'(x)+2f'(-x)=\dfrac{2|x|}{x^6+x^2+1}$ (1) $\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow f'(-x)+2f'(x)=\dfrac{2|x|}{x^6+x^2+1}$ (2)

Lấy $2.(2)-(1)$ ta được: $3f'(x)=\dfrac{2|x|}{x^6+x^2+1} \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{2}{3}.\dfrac{|x|}{x^6+x^2+1}$

$\Rightarrow f'(x)=f'(-x)\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Vì $\int\limits_{-3}^{2} f'(x)dx=f(2)-f(-3)=m-n$

Ta có $\int_{-2}^{3} f'(x)dx = f(3) - f(-2) \Rightarrow -\int_{-2}^{3} f'(x)dx = f(-2) - f(3)$

Xét $-\int_{-2}^{3} f'(x)dx$

Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$.

Đổi cận: $x = -2 \Rightarrow t = 2$; $x = 3 \Rightarrow t = -3$.

$\Rightarrow \int_{2}^{-3} f'(-t)dt = -\int_{-3}^{2} f'(-t)dt = -\int_{-3}^{2} f'(t)dt = -(m-n) = n-m.$

Hay: $f(-2) - f(3) = n - m.$

Câu 50. **[2D2-7.1-3]** Cho các số thực dương x, y thay đổi và thỏa điều kiện $x > y > 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \log_{\frac{x}{y}}^2 (x^2) + 3\log_y \frac{x}{y}$ là:

A. 19. **B.** 13. **C.** 14. **D.** 15.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Thắng ; Fb: Nguyễn Thắng.

Phản biện: Lê Thị Hồng Vân ; FB: Hồng Vân.

Chọn D

Vì $x > y > 1$ nên ta có: $T = \frac{4}{\log_x^2 \frac{x}{y}} + 3(\log_y x - 1) = \frac{4}{(1-\log_x y)^2} + \frac{3}{\log_x y} - 3$.

Đặt $t = \log_x y \Rightarrow 0 < t < 1$ (vì $x > y > 1$) thì:

$T = \frac{4}{(t-1)^2} + \frac{3}{t} - 3 = \frac{-3t^3 + 9t^2 - 5t + 3}{t(t-1)^2} = -3 + \frac{3t^2 - 2t + 3}{t^3 - 2t^2 + t}$.

$\Rightarrow T'(t) = \frac{-3t^4 + 4t^3 - 10t^2 + 12t - 3}{t^2(t-1)^4} = \frac{(t-1)(-3t^3 + t^2 - 9t + 3)}{t^2(t-1)^4} = \frac{-3t^3 + t^2 - 9t + 3}{t^2(t-1)^3} = \frac{(-3t+1)(t^2+3)}{t^2(t-1)^3}$

$T' = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$.

Ta có bảng biến thiên:

x	0		$\frac{1}{3}$		1
T'	‖	$-$	0	$+$	‖
T	‖	↘	15	↗	‖

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 15.

Cách 2: Của cô Lê Thị Hồng Vân

Đặt $a = 1 - \log_x y; b = \log_x y \Rightarrow \begin{cases} 0 < a, b < 1 \\ a + b = 1 \end{cases}$ và $T = \frac{4}{a^2} + \frac{3}{b} - 3$

Áp dụng BĐT Cô – si cho 2 số dương ta có: $\frac{4}{a^2} + \frac{3}{b} \geq 2\sqrt{\frac{12}{a^2 b}} \Rightarrow T \geq 2\sqrt{\frac{12}{a^2 b}} - 3.$

Ta lại có: Theo BĐT Cô – si cho 3 số dương: $\frac{a^2}{4}.b \leq \left(\frac{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + b}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

$\Rightarrow a^2 b \leq \frac{4}{27} \Rightarrow T \geq 2\sqrt{12 : \frac{4}{27}} - 3 = 15.$

Dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a, b > 0; a + b = 1 \\ \frac{4}{a^2} = \frac{3}{b}; \frac{a}{2} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 15.

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BẾN TRE
NĂM HỌC 2018 – 2019
Môn: Toán Lớp: 12

Câu 1 . a) Giải phương trình $\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{6}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(y-2)\sqrt{x+2}-x\sqrt{y}=0 & (1)\\ \sqrt{x+1}\left(\sqrt{y}+1\right)=(y-3)\left(1+\sqrt{x^2+y-3x}\right) & (2)\end{cases}$

c) Cho hàm số $y=\frac{x+1}{2x-1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến (d) của đồ thị (C) biết (d) cắt trục Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A, B sao cho $AB=\sqrt{10}.OA$ (với O là gốc tọa độ).

Câu 2.

a) Bạn An có một đồng xu mà khi tung có xác suất xuất hiện mặt ngửa là $\frac{1}{3}$ và bạn Bình có một

đồng xu mà khi tung có xác suất xuất hiện mặt ngửa là $\frac{2}{5}$. Hai bạn An và Bình lần lượt chơi trò chơi tung đồng xu của mình đến khi có người được mặt ngửa, ai được mặt ngửa trước thì thắng. Các lần tung là độc lập với nhau và bạn An chơi trước. Xác suất bạn An thắng là $\frac{p}{q}$, trong đó p và q là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tìm $q-p$.

b) Tìm hệ số của số hạng chứa x^2 trong khai triển nhị thức $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$ biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn: $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+...+(n-1)C_n^{n-1}+nC_n^n=64n$.

Câu 3.

a) Trong không gian cho 4 điểm A, B, C, D thỏa mãn $AB=3, BC=7, CD=11, DA=9$. Tính $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$.

b) Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2-3b\le 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{4}{(b+2)^2}+\frac{8}{(c+3)^2}$.

Câu 4: **(4 điểm).**

Cho hình chóp $S.ABC$, có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA=2a$ và tam giác ABC vuông tại C với $AB=2a, BAC=30^0$. Gọi M là điểm di động trên AC, đặt $AM=x, \left(0\le x\le a\sqrt{3}\right)$. Tính khoảng cách từ S đến BM theo a và x. Tìm các giá trị của x để khoảng cách này lớn nhất.

Lời giải

taminhtrangdhsp@gmail.com

Câu 1 . a) Giải phương trình $\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{6}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$.

Lời giải

Tác giả: Tạ Minh Trang; Fb: Minh Trang

$$\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{6}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x+\cos 2x-1+\sqrt{3}(\sin x-\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x-2\sin^2 x+\sqrt{3}(\sin x-\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x(\cos x-\sin x)+\sqrt{3}(\sin x-\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)\left(2\sin x-\sqrt{3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x-\sin x=0\\ 2\sin x-\sqrt{3}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có 3 họ nghiệm $x=\frac{\pi}{4}+k\pi;\ x=\frac{\pi}{3}+k2\pi; x=\frac{2\pi}{3}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

anhtu82t@gmail.com

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(y-2)\sqrt{x+2}-x\sqrt{y}=0 & (1)\\ \sqrt{x+1}\left(\sqrt{y}+1\right)=(y-3)\left(1+\sqrt{x^2+y-3x}\right) & (2)\end{cases}$

Lời giải

Tác giả: Đồng Anh Tú ; Fb: AnhTu

ĐK: $\begin{cases}x\ge -1\\ y\ge 0\\ x^2+y-3x\ge 0\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{x+2}\\ b=\sqrt{y}\end{cases}$, $(a\ge 1, b\ge 0)$, ta được $\begin{cases}x=a^2-2\\ y=b^2\end{cases}$. Khi đó phương trình (1) trở thành $\left(b^2-2\right)a-b\left(a^2-2\right)=0\Leftrightarrow ab(b-a)+2(b-a)=0$
$\Leftrightarrow (b-a)(ab+2)=0\Leftrightarrow a=b$

(do $ab+2>0$) nên PT (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x+2}=\sqrt{y}\Leftrightarrow x+2=y$. Thay vào phương trình (2), ta được

$$\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+2}+1\right)=(x-1)\left(1+\sqrt{x^2-2x+2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{(x+1)+1}\right)=(x-1)\left(1+\sqrt{(x-1)^2+1}\right)\ (3)$$

Xét hàm số $f(t)=t\left(1+\sqrt{1+t^2}\right)$ trên $\mathbb{R}$, ta có

$f'(t)=1+\sqrt{1+t^2}+\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}>0, \forall t\in\mathbb{R}$, do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có (3) $\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+1}\right)=f(x-1)\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=x-1\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 1\\ x+1=x^2-2x+1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 1\\ x^2-3x=0\end{cases}\Leftrightarrow x=3$.

Với $x=3\Rightarrow y=5$, ta thấy $x=3, y=5$ thỏa mãn điều kiện .

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=(3;5)$.

Nhận xét: Ta có thể biến đổi phương trình (1) đi theo hướng khác như sau:

Từ PT(2), ta có $y \ge 3$, nên PT(1) $\Leftrightarrow \dfrac{y-2}{\sqrt{y}} = \dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$ (4), ta có đặt $y-2=a$, $a \ge 1$ thay vào (4), ta được $\dfrac{a}{\sqrt{a+2}} = \dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$, từ đây suy ra $x>0$. Xét hàm số $g(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t+2}}$ đồng biến trên $[0;+\infty)$, ta được $a=x$ hay $y=x+2$.

c) Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{2x-1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến (d) của đồ thị (C) biết (d) cắt trục Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{10}.OA$ (với O là gốc tọa độ).

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \ne \dfrac{1}{2}$

Ta có $y' = \dfrac{-3}{(2x-1)^2} < 0, \forall x \ne \dfrac{1}{2}$ nên tiếp tuyến của (C) luôn có hệ số góc âm.

Tam giác OAB vuông tại O mà $AB = \sqrt{10}.OA$ từ đó ta có $OB = 3OA$.

Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến (d). Khi đó ta có $k<0$ nên $k = -\tan OAB = -\dfrac{OB}{OA} = -3$.

Gọi m là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến (d) với đồ thị (C).

Ta có $-\dfrac{3}{(2m-1)^2} = -3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$.

+) Nếu $m=0$, khi đó tiếp điểm của tiếp tuyến (d) với đồ thị (C) là $M(0;-1)$.

Phương trình của (d) là: $y = -3(x-0)-1 \Leftrightarrow y = -3x-1$.

+) Nếu $m=1$, khi đó tiếp điểm của tiếp tuyến (d) với đồ thị (C) là $N(1;2)$.

Phương trình của (d) là: $y = -3(x-1)+2 \Leftrightarrow y = -3x+5$.

Vậy có hai tiếp tuyến của (C) cần tìm là $y=-3x-1$ và $y=-3x+5$.

Manhsang12.1@gmail.com

Câu 2.

a) Bạn An có một đồng xu mà khi tung có xác suất xuất hiện mặt ngửa là $\frac{1}{3}$ và bạn Bình có một đồng xu mà khi tung có xác suất xuất hiện mặt ngửa là $\frac{2}{5}$. Hai bạn An và Bình lần lượt chơi trò chơi tung đồng xu của mình đến khi có người được mặt ngửa, ai được mặt ngửa trước thì thắng. Các lần tung là độc lập với nhau và bạn An chơi trước. Xác suất bạn An thắng là $\frac{p}{q}$, trong đó p và q là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tìm $q-p$.

Lời giải

Giả sử bạn An thắng ở lần gieo thứ n, $n\in\mathbb{N}, n\geq 1$ khi đó bạn An và bạn Bình tung đồng xu ở $n-1$ lần

trước đó đều là sấp, xác suất để điều này xảy ra là $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$.

Do n có thể tiến tới dương vô cùng, vậy nên áp dụng quy tắc cộng xác suất, ta có xác suất để An thắng là: $\frac{p}{q}=\frac{1}{3}\cdot\left[1+\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{5}\right)^m+\cdots\right]$; $m\in N^*$

Trong đó $S=1+\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{5}\right)^m+\cdots$ là tổng của cấp số nhân vô hạn với số hạng đầu $u_1=1$ và công

bội $q_0=\frac{2}{5}$ nên $S=\frac{1}{1-\frac{2}{5}}=\frac{5}{3}$, suy ra $\frac{p}{q}=\frac{1}{3}.\frac{1}{1-\frac{2}{5}}=\frac{5}{9}$

Từ đó $q=9$; $p=5$ suy ra $q-p=9-5=4$.

b. Tìm hệ số của số hạng chứa x^2 trong khai triển nhị thức $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$ biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn: $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+...+(n-1)C_n^{n-1}+nC_n^n=64n$.

Lời giải

Xét khai triển $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+....+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n$ (1) $(n\in N^*)$

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta có:

$$n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2x+3C_n^3x^2+...+(n-1)C_n^{n-1}x^{n-2}+nC_n^nx^{n-1} \qquad (2)$$

Thay $x=1$ vào (2) ta được:

$n.2^{n-1}=C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+...+(n-1)C_n^{n-1}+nC_n^n$. Từ giả thiết

$C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+...+(n-1)C_n^{n-1}+nC_n^n=64n$

Ta có: $64n=n.2^{n-1}\Leftrightarrow 2^6=2^{n-1}\Leftrightarrow 6=n-1\Leftrightarrow n=7$ (thỏa mãn $n\in N^*$).

Số hạng tổng quát của khai triển $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^7$ là:

$$T=C_7^k\left(\sqrt{x}\right)^{7-k}.\left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^k=\frac{1}{2^k}C_7^k.x^{\frac{7-k}{2}}.x^{-\frac{k}{4}}=\frac{1}{2^k}C_7^k.x^{\frac{14-3k}{4}} \quad ;0\le k\le 7,\ k\in N$$

Để T chứa x^2 ta cần tìm số k sao cho $0\le k\le 7,\ k\in N$ và $\frac{14-3k}{4}=2\Leftrightarrow k=2$ (thỏa mãn).

Vậy hệ số của số hạng chứa x^2 là: $\frac{1}{2^2}.C_7^2=\frac{21}{4}$.

Câu 3.

a) Trong không gian cho 4 điểm A,B,C,D thỏa mãn $AB=3,BC=7,CD=11,DA=9$. Tính $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$.

Giải

Ta có

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}&=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right).\overrightarrow{BD}\\&=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{BD}+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}\right).\overrightarrow{BD}\\&=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right).\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}\right).\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}\right)\\&=AD^2-AB^2+BC^2-DC^2.\end{aligned}$$

Thay số vào ta được $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0$.

b) Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2-3b\le 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{4}{(b+2)^2}+\frac{8}{(c+3)^2}$.

Lời giải

Với mọi số thực dương x,y,z,t, ta có:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{t^2}\ge\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)^2\ge\frac{1}{4}\left(\frac{16}{x+y+z+t}\right)^2=\frac{64}{(x+y+z+t)^2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=t$.

Ta có: $P=\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{4}{(b+2)^2}+\frac{8}{(c+3)^2}=\frac{4}{(2a+2)^2}+\frac{4}{(b+2)^2}+\frac{8}{(c+3)^2}$

$$=4\left[\frac{1}{(2a+2)^2}+\frac{1}{(b+2)^2}+\frac{1}{(c+3)^2}+\frac{1}{(c+3)^2}\right]$$

$$\geq 4.\frac{64}{(2a+2+b+2+c+3+c+3)^2}=\frac{256}{(2a+b+2c+10)^2}.$$

Theo giả thiết, ta có: $a^2+b^2+c^2-3b\leq 0$.

Áp dụng BĐT Cô-si cho các số không âm, ta có:

$0<2a+b+2c+10=2a+4b+2c+10-3b$

$\leq(a^2+1)+(b^2+4)+(c^2+1)+10-3b=a^2+b^2+c^2-3b+16$

≤ 16

$\Rightarrow 0<(2a+b+2c+10)^2\leq 256$

Suy ra: $P\geq\frac{256}{(2a+b+2c+10)^2}\geq 1$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}2a+2=b+2=c+3\\a^2+b^2+c^2-3b=0\\a=1;b=2;c=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=c=1\\b=2\end{cases}$.

Vậy $\min P=1$.

Bài tập tương tự: (Lê Cảnh Dương-sưu tầm).

Cho a,b,c là các số thực không âm và không đồng thời bằng 0 thay đổi thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2\leq 6b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{(a+b+c)^2}+\frac{8}{(b+11)^2}+\frac{1}{(c+6)^2}$.

Lời giải

Ta có: $P=\frac{1}{(a+b+c)^2}+\frac{8}{(b+11)^2}+\frac{1}{(c+6)^2}=\frac{4}{(2a+2b+2c)^2}+\frac{8}{(b+11)^2}+\frac{4}{(2c+12)^2}$

$$=4\left[\frac{1}{(2a+2b+2c)^2}+\frac{1}{(b+11)^2}+\frac{1}{(b+11)^2}+\frac{1}{(2c+12)^2}\right]$$

$$\geq 4.\frac{64}{(2a+2b+2c+2b+22+2c+12)^2}=\frac{256}{(2a+4b+4c+34)^2}.$$

Theo giả thiết, ta có: $a^2+b^2+c^2-6b\leq 0$.

Áp dụng BĐT Cô-si cho các số không âm, ta có:

$$0 < 2a+4b+4c+34 = 2a+10b+4c+34-6b$$
$$\le (a^2+1)+(b^2+25)+(c^2+4)+34-6b = a^2+b^2+c^2-6b+64$$
$$\le 64$$
$$\Rightarrow 0 < (2a+4b+4c+34)^2 \le 64^2$$

Suy ra: $P \ge \dfrac{256}{(2a+4b+4c+34)^2} \ge \dfrac{256}{64^2} = \dfrac{1}{16}$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+2b+2c = b+11 = 2c+12 \\ a^2+b^2+c^2-6b = 0 \\ a=1; b=5; c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=5 \\ c=2 \end{cases}$.

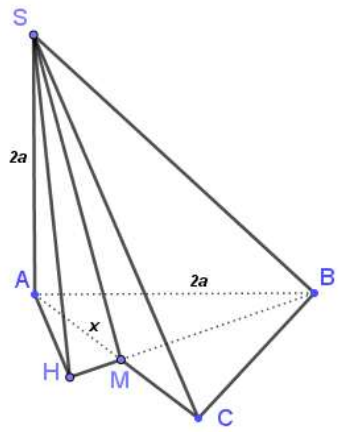
Vậy $\min P = \dfrac{1}{16}$.

Câu 4: (4 điểm).

Cho hình chóp $S.ABC$, có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = 2a$ và tam giác ABC vuông tại C với $AB = 2a$, $BAC = 30^0$. Gọi M là điểm di động trên AC, đặt $AM = x$, $\left(0 \le x \le a\sqrt{3}\right)$. Tính khoảng cách từ S đến BM theo a và x. Tìm các giá trị của x để khoảng cách này lớn nhất.

Lời giải

Cách 1



*) Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên BM. Khi đó độ dài SH chính là khoảng cách từ S đến BM.

Ta có: $\left.\begin{matrix} SH \perp BM \\ SA \perp BM \end{matrix}\right\} \Rightarrow BM \perp (SAH) \Rightarrow BM \perp AH$.

Do đó hai tam giác AHM và BCM đồng dạng nên $\frac{AH}{BC}=\frac{AM}{BM}\Rightarrow AH=\frac{AM.BC}{BM}$.

Mà $AM=x,\ BC=AB.\sin 30^0=a,$

$BM=\sqrt{(2a)^2+x^2-2.2a.x.\cos 30^0}=\sqrt{4a^2+x^2-2\sqrt{3}ax}$

$\Rightarrow AH=\frac{ax}{\sqrt{4a^2+x^2-2\sqrt{3}ax}};\ SH^2=SA^2+AH^2=a^2\frac{5x^2-8\sqrt{3}ax+16a^2}{x^2-2\sqrt{3}ax+4a^2}$

$\Rightarrow SH=a\sqrt{\frac{5x^2-8\sqrt{3}ax+16a^2}{x^2-2\sqrt{3}ax+4a^2}}$.

*) Do SA cố định nên SH lớn nhất khi và chỉ khi AH lớn nhất.

Ta có $AH^2=\frac{a^2x^2}{x^2-2\sqrt{3}ax+4a^2}$.

TH1: $x=0\Rightarrow AH=0$.

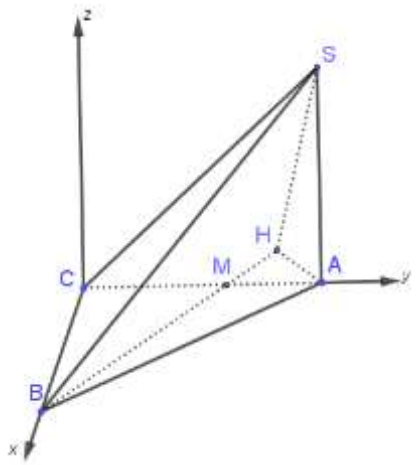
TH2: $x\neq 0\Rightarrow AH^2=\frac{a^2}{1-2\sqrt{3}\frac{a}{x}+4\frac{a^2}{x^2}}$.

Do đó AH lớn nhất khi và chỉ khi hàm số $f(t)=4t^2-2\sqrt{3}t+1$ nhỏ nhất, với $t=\frac{a}{x}$ $(t\geq\frac{\sqrt{3}}{3})$.

Mà $f'(t)=8t-2\sqrt{3}>0,\ \forall t\geq\frac{\sqrt{3}}{3}$, nên $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$, tức là $x=a\sqrt{3}$, khi đó $AH=a\sqrt{3}$.

Từ hai trường hợp trên ta kết luận được SH lớn nhất khi và chỉ khi $x=a\sqrt{3}$.

Cách 2



Ta có $AC=AB.\cos 30^o=a\sqrt{3}$.

Trong không gian, chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $C(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $A(0;a\sqrt{3};0)$, $S(0;a\sqrt{3};2a)$. Khi đó $M(0;a\sqrt{3}-x;0)$. Ta có:

$$\overrightarrow{BS}=(-a;a\sqrt{3};2a),\ \overrightarrow{BM}=(-a;a\sqrt{3}-x;0)$$
$$\Rightarrow\left[\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BM}\right]=\left(-2\sqrt{3}a^2+2ax;-2a^2;-ax\right)$$

$$\Rightarrow d(S;BM)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BM}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{BM}\right|}=a\sqrt{\frac{5x^2-8\sqrt{3}ax+16a^2}{x^2-2\sqrt{3}ax+4a^2}}.$$

Từ đây, xét hàm số $f(x)=\dfrac{5x^2-8\sqrt{3}ax+16a^2}{x^2-2\sqrt{3}ax+4a^2}$ với $0\le x\le a\sqrt{3}$, ta suy ra được $d(S;BM)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=a\sqrt{3}$.

Cách 3: Dễ thấy $SH\le SM\le SC\Rightarrow SH$ lớn nhất là SC, khi đó vị trí M trùng với C, tức là $x=a\sqrt{3}$.

Đây là bài toán cực trị dừng lại ở mức trung bình và thường xuất hiện trong các đề thi học sinh giỏi cấp tỉnh. Mời bạn đọc tham khảo các bài toán dưới đây.

Bài tập tương tự

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $BAC=60^0$ cạnh $SA=a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M là điểm di động trên đoạn AB và $AM=x$, $0\le x\le a$, K là hình chiếu của S trên DM. Tính độ dài đường SK theo a và x. Tìm giá trị lớn nhất của đoạn SK.

Đề thi HSG 11 THPT Nho Quan A, Ninh Bình năm 2018 – 2019

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh $SA=a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M là điểm di động trên đoạn BC và $BM=x$, K là hình chiếu của S trên DM. Tính độ dài đoạn SK theo a và x. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn SK.

Đề thi HSG 11 Nghệ An năm 2017 – 2018

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $SA=SB=SC=a$. Đặt $SD=x$ $\left(0<x<a\sqrt{3}\right)$. Tìm x theo a để tích $SD.AC$ đạt giá trị lớn nhất.

ĐỀ THI HSG LỚP 12 TỈNH LÀO CAI

NĂM 2018 – 2019

MÔN TOÁN

TIME: 180 PHÚT

Câu 1 (5.0 điểm).

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(17-3x)\sqrt{5-x}+(3y-14)\sqrt{4-y}=0\\ 2\sqrt{2x+y+5}+3\sqrt{3x+2y+11}=x^2+6x+13\end{cases}$, $(x,y\in\mathbb{R})$.

b) Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}-4\sqrt[4]{a+b+c}.$$

Câu 2 (4.0 điểm).

a) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-3)^{2018}\left(e^{2x}-e^x+\frac{1}{3}\right)(x^2-2x)$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $f(x^2-8x+m)$ có đúng 3 điểm cực trị sao cho $x_1^2+x_2^2+x_3^2=50$, trong đó x_1, x_2, x_3 là hoành độ của ba cực trị đó.

b) Cho dãy số (u_n) xác định như sau $\begin{cases}u_1=\frac{1}{2};u_2=3\\ u_{n+2}=\frac{u_{n+1}u_n+1}{u_{n+1}+u_n},\forall n\ge 1\end{cases}$

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó

Câu 3 (3.0 điểm).

a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D, có $CD=2AD=2AB$. Gọi $M(2;4)$ là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AB=3AM$. Điểm N thuộc cạnh BC sao cho tam giác DMN cân tại M. Phương trình đường thẳng MN là $2x+y-8=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang $ABCD$ biết D thuộc đường thẳng $d:x+y=0$ và điểm A thuộc đường thẳng $d':3x+y-8=0$

b) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a. Biết hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{MD}$. Trên

cạnh CD lấy các điểm I, N sao cho $ABM = MBI$ và MN vuông góc với BI. Biết góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.AMCB$ và khoảng cách từ N đến mặt phẳng (SBC).

Câu 4 (3.0 điểm). Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $15^x + y^2 = 2^z$

Câu 5 (3.0 điểm). Tính tổng

$$S = \frac{1}{2019}\left(C_{2019}^{1}\right)^2 + \frac{2}{2018}\left(C_{2019}^{2}\right)^2 + ... + \frac{2018}{2}\left(C_{2019}^{2018}\right)^2 + \frac{2019}{1}\left(C_{2019}^{2019}\right)^2.$$

GIẢI CHI TIẾT ĐỀ THI HSG LỚP 12 TỈNH LÀO CAI

NĂM 2018 – 2019

MÔN TOÁN

TIME: 180 PHÚT

Câu 1 (5.0 điểm).

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(17-3x)\sqrt{5-x}+(3y-14)\sqrt{4-y}=0\\ 2\sqrt{2x+y+5}+3\sqrt{3x+2y+11}=x^2+6x+13\end{cases}$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Ngọc Tâm; Fb:Nguyễn Ngọc Tâm

Điều kiện: $\begin{cases}5-x\ge 0\\ 4-y\ge 0\\ 2x+y+5\ge 0\\ 3x+2y+11\ge 0\end{cases}$ $(*)$.

Đặt $\sqrt{5-x}=a\ge 0$; $\sqrt{4-y}=b\ge 0$, phương trình $(17-3x)\sqrt{5-x}+(3y-14)\sqrt{4-y}=0$ trở thành:

$\left[17-3\left(5-a^2\right)\right].a+\left[3\left(4-b^2\right)-14\right]=0 \Leftrightarrow \left(3a^2+2\right).a=\left(3b^2+2\right).b \Leftrightarrow 3a^3+2a=3b^3+2b$

Xét hàm số $y=f(t)=3t^3+2t$ trên $[0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=9t^2+2>0,\ \forall t\in[0;+\infty)$ nên hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Vì thế với $a\ge 0,\ b\ge 0$ thì $3a^3+2a=3b^3+2b\Leftrightarrow f(a)=f(b)\Leftrightarrow a=b$.

Suy ra $\sqrt{5-x}=\sqrt{4-y}\Leftrightarrow 5-x=4-y\Leftrightarrow y=x-1$.

Thay $y=x-1$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình:
$2\sqrt{3x+4}+3\sqrt{5x+9}=x^2+6x+13\ (1)$.

Điều kiện $x\in\left[-\frac{4}{3};5\right]$.

Khi đó phương trình $(1)\Leftrightarrow\left(2\sqrt{3x+4}-2\right)+\left(3\sqrt{5x+9}-6\right)=x^2+6x+5$

$$\Leftrightarrow\frac{4(3x+4)-4}{2\sqrt{3x+4}+2}+\frac{9(5x+9)-36}{3\sqrt{5x+9}+6}=(x+1)(x+5)$$

$$\Leftrightarrow\frac{6(x+1)}{\sqrt{3x+4}+1}+\frac{15(x+1)}{\sqrt{5x+9}+2}=(x+1)(x+5)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=0\\ \dfrac{6}{\sqrt{3x+4}+1}+\dfrac{15}{\sqrt{5x+9}+2}=x+5\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ \dfrac{6}{\sqrt{3x+4}+1}+\dfrac{15}{\sqrt{5x+9}+2}=x+5\ (2)\end{array}\right.$$

Phương trình (2) tương đương với $\frac{6}{\sqrt{3x+4}+1}+\frac{15}{\sqrt{5x+9}+2}-x=5$.

Đặt $g(x)=\frac{6}{\sqrt{3x+4}+1}+\frac{15}{\sqrt{5x+9}+2}-x, x\in\left[-\frac{4}{3};5\right]$.

Ta có $g'(x)=\frac{-9}{\left(\sqrt{3x+4}+1\right)^2.\sqrt{3x+4}}-\frac{75}{2\left(\sqrt{5x+9}+2\right)^2.\sqrt{5x+9}}-1<0,\ \forall x\in\left(-\frac{4}{3};5\right)$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $\left[-\frac{4}{3};5\right]$

Vì thế phương trình $g(x)=5$ có nhiều nhất một nghiệm trên $\left[-\frac{4}{3};5\right]$.

Ta lại có $x=0$ là nghiệm của phương trình $g(x)=5$ nên đây là nghiệm duy nhất.

Với $x=-1$ thì $y=-2$.

Với $x=0$ thì $y=-1$.

So sánh điều kiện $(*)$, hệ đã cho có hai nghiệm $(x\,;\,y)$ là $(-1\,;-2)$; $(0\,;-1)$.

b) Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}-4\sqrt[4]{a+b+c}.$$

Lời giải

Ta có $\frac{a^2+bc}{b+c}+a=\frac{a^2+bc+ab+ac}{b+c}=\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}\Rightarrow\frac{a^2+bc}{b+c}=\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}-a$

Tương tự ta có: $\frac{b^2+ca}{c+a}=\frac{(b+c)(b+a)}{c+a}+-b$; $\frac{c^2+ab}{a+b}=\frac{(a+c)(c+b)}{a+b}-c$

$$\Rightarrow P=\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}+\frac{(b+c)(b+a)}{c+a}+\frac{(c+a)(c+b)}{a+b}-(a+b+c)-4\sqrt[4]{a+b+c}$$

ÁP dụng bất đẳng thức AM-GM

$$\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}+\frac{(b+c)(b+a)}{c+a}\ge 2(a+b)$$

$$\frac{(b+c)(b+a)}{c+a}+\frac{(c+a)(c+b)}{a+b}\ge 2(b+c)$$

$$\frac{(c+a)(c+b)}{a+b}+\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}\ge (c+a)$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}+\frac{(b+c)(b+a)}{c+a}+\frac{(c+a)(c+b)}{a+b}\right)\ge 4(a+b+c)$$

$$\Rightarrow P\ge a+b+c-4\sqrt[4]{a+b+c}$$

Đặt $t=\sqrt[4]{a+b+c}>0\Rightarrow a+b+c-4\sqrt[4]{a+b+c}=t^4-4t$.

Ta có $t^4-4t=t^4-2t^2+1+2\left(t^2-2t+1\right)-3=\left(t^2-1\right)^2-3\ge -3\Rightarrow P\ge -3$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là -3 khi $\begin{cases}a+b+c=1\\a=b=c\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

Câu 2 (4.0 điểm).

a) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-3)^{2018}\left(e^{2x}-e^{x}+\frac{1}{3}\right)(x^2-2x)$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $f(x^2-8x+m)$ có đúng 3 điểm cực trị sao cho $x_1^2+x_2^2+x_3^2=50$, trong đó x_1, x_2, x_3 là hoành độ của ba cực trị đó.

Lời giải

Cách 1.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=0\\x=2\end{array}\right.$. Trong đó, $x=3$ là nghiệm bội chẵn.

Xét hàm $g(x)=f(x^2-8x+m)$ có $g'(x)=(2x-8)f'(x^2-8x+m)$. Khi đó,

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x^2-8x+m=3\\x^2-8x+m=2\\x^2-8x+m=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=4 & \\x^2-8x=3-m & (1)\\x^2-8x=2-m & (2)\\x^2-8x=-m & (3)\end{array}\right..$$

Ta xét hàm $h(x)=x^2-8x$. Hàm số này có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-16	$\nearrow$	$+\infty$

Nếu $3-m<-16\Leftrightarrow m>19$ thì các phương trình (1), (2), (3) đều vô nghiệm. Do đó, hàm số $g(x)$ chỉ có một cực trị.

Nếu $2-m\le-16\le3-m\Leftrightarrow18\le m\le19$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm bội chẵn hoặc nghiệm kép, phương trình (2) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép, phương trình (3) vô nghiệm. Do đó, hàm số $g(x)$ chỉ có một cực trị.

Nếu $-m\le-16<2-m\Leftrightarrow16\le m<18$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm bội chẵn, phương trình (2) có 2 nghiệm bội lẻ, phương trình (3) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép. Do đó, hàm số $g(x)$ có ba cực trị. Khi đó, giả sử $x_1=4$ thì x_2, x_3 là hai nghiệm của phương trình (2) thỏa mãn điều kiện

$x_2^2+x_3^2=34\Leftrightarrow(x_2+x_3)^2-2x_2x_3=34$.

Kết hợp với định lý Vi-et ta có $64-2(m-2)=34 \Leftrightarrow m=17$ (thỏa điều kiện $16 \le m < 18$).

Nếu $-m > -16 \Leftrightarrow m < 16$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm bội chẵn, phương trình (2) có 2 nghiệm đơn, phương trình (3) có 5 nghiệm đơn. Do đó, hàm số $g(x)$ không thỏa mãn có ba cực trị.

Vậy $m=17$ là giá trị cần tìm.

Cách 2.

Xét hàm $g(x)=f\left(x^2-8x+m\right)$ có

$$g'(x)=(2x-8)\,f'\left(x^2-8x+m\right)$$

$$=(2x-8)\left(x^2-8x+m-3\right)^{2018}\left(e^{2x^2-16x+2m}-e^{x^2-8x+m}+\frac{1}{3}\right)\left[\left(x^2-8x+m\right)^2-2\left(x^2-8x+m\right)\right]$$

.

Dấu của $g'(x)$ cùng dấu với $(2x-8)\left[\left(x^2-8x+m\right)^2-2\left(x^2-8x+m\right)\right]$.

Ta có

$$(2x-8)\left[\left(x^2-8x+m\right)^2-2\left(x^2-8x+m\right)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x^2-8x+m=0 \\ x^2-8x+m=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x^2-8x=-m \\ x^2-8x=2-m \end{array}\right. .$$

Ta xét hàm $h(x)=x^2-8x$. Hàm số này có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-16	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi $-m \le -16 < 2-m \Leftrightarrow 16 \le m < 18$. Khi đó, giả sử $x_1=4$ thì x_2, x_3 là hai nghiệm của phương trình $x^2-8x=2-m$ thỏa mãn điều kiện

$$x_2^2+x_3^2=34 \Leftrightarrow \left(x_2+x_3\right)^2-2x_2x_3=34.$$

Kết hợp với định lý Vi-et ta có $64-2(m-2)=34 \Leftrightarrow m=17$ (thỏa điều kiện $16 \le m < 18$).

Vậy $m=17$ là giá trị cần tìm.

b) Cho dãy số (u_n) xác định như sau $\begin{cases} u_1=\dfrac{1}{2};u_2=3 \\ u_{n+2}=\dfrac{u_{n+1}u_n+1}{u_{n+1}+u_n},\forall n\ge 1 \end{cases}$

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó

Lời giải

Tác giả: Lê Thị Nguyệt ; Fb: Nguyetle

Từ $u_{n+2}=\dfrac{u_{n+1}u_n+1}{u_{n+1}+u_n}$ được $u_{n+2}+1=\dfrac{(u_{n+1}+1)(u_n+1)}{u_{n+1}+u_n}$ và $u_{n+2}-1=\dfrac{(u_{n+1}-1)(u_n-1)}{u_{n+1}+u_n}$.

Suy ra $\dfrac{u_{n+2}-1}{u_{n+2}+1}=\dfrac{(u_{n+1}-1)(u_n-1)}{(u_{n+1}+1)(u_n+1)}$.

Đặt $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$ ta có $v_{n+2}=v_n.v_{n+1}$ nên $|v_{n+2}|=|v_n|.|v_{n+1}|$.

Đặt $x_n=\ln|v_n|$ ta được $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$.

Phương trình đặc trưng $t^2-t-1=0$ có nghiệm $t_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};t_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Vậy $x_n=\alpha\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\beta\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Từ $\begin{cases} u_1=\dfrac{1}{2} \\ u_2=3 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} v_1=-\dfrac{1}{3} \\ v_2=\dfrac{1}{2} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_1=-\ln 3 \\ x_2=-\ln 2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\beta=-\ln 3 \\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\alpha+\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\beta=-\ln 2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \alpha\approx -0.38 \\ \beta\approx 0.78 \end{cases}$.

Vì $\left|\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right|>1;\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right|<1$ nên $\lim x_n=\lim\left[\alpha\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\beta\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]=-\infty$

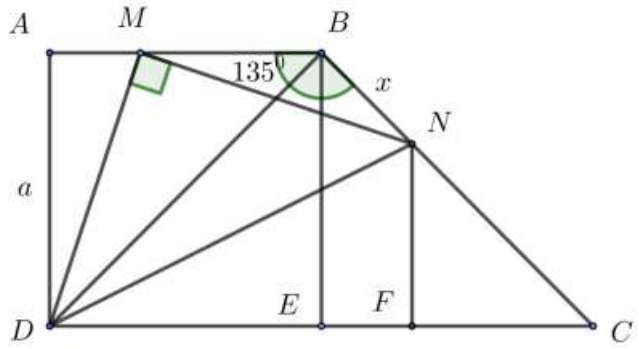
Suy ra $\lim|v_n|=\lim\dfrac{u_n-1}{u_n+1}=0$. Vậy dãy (u_n) có giới hạn là 1.

Câu 3 (3.0 điểm).

a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D, có $CD=2AD=2AB$. Gọi $M(2;4)$ là điểm thuộc cạnh AB sao cho

$AB = 3AM$. Điểm N thuộc cạnh BC sao cho tam giác DMN cân tại M. Phương trình đường thẳng MN là $2x + y - 8 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang $ABCD$ biết D thuộc đường thẳng $d: x + y = 0$ và điểm A thuộc đường thẳng $d': 3x + y - 8 = 0$

Lời giải



+) Đặt $BN = x, AB = a \Rightarrow MA = MN = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{10}}{3}$.

Xét ΔBMN có

$$MN^2 = MB^2 + BN^2 - 2MN.NB.\cos \text{MBN} \Leftrightarrow \frac{10a^2}{9} = \frac{4a^2}{9} + x^2 - 2.x.\frac{2a}{3}.\cos 135^o$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{2a^2}{3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

Gọi E là chân đường vuông góc hạ từ B, kẻ NF vuông góc với DC. Ta có $\frac{NF}{BE} = \frac{CN}{CB} = \frac{CF}{CE}$

$$\Leftrightarrow \frac{NF}{a} = \frac{2}{3} = \frac{CF}{a} \Leftrightarrow NF = CF = \frac{2a}{3} \Rightarrow DN = \sqrt{\left(\frac{4a}{3}\right)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{5}}{3}.$$

Nhận thấy $MD^2 + MN^2 = \frac{10a^2}{9} + \frac{10a^2}{9} = \frac{20a^2}{9} = DN^2$. Suy ra ΔDMN vuông tại M.

+) Vì D thuộc đường thẳng $d: x + y = 0$ nên $D(d; -d) \Rightarrow \overrightarrow{MD} = (d - 2; -d - 4)$.

Phương trình đường thẳng $MN: 2x + y - 8 = 0$ có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (-1; 2) \Rightarrow \overrightarrow{MD}.\vec{u} = 0 \Rightarrow d = -2 \Rightarrow D(-2; 2)$

+) Điểm A thuộc đường thẳng $d': 3x + y + 8 = 0$ nên $A(a; -3a + 8)$

$\Rightarrow \overrightarrow{DA}=(a+2;-3a+6), \overrightarrow{MA}=(a-2;-3a+4) \Rightarrow \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{MA}=0 \Rightarrow a^2-3a+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=2 \end{array}\right.$

*) Trường hợp 1: $a=1 \Rightarrow A(1;5)$

Giả sử $B(x;y)$ ta có $\overrightarrow{AB}=(x-1;y-5); \overrightarrow{AM}=(1;-1) \Rightarrow 3\overrightarrow{AM}=(3;-3)$

Vì $AB=3AM \Rightarrow \overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=3 \\ y-5=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow B(4;2)$

Giả sử $C(x;y)$ ta có $\overrightarrow{DC}=(x+2;y-2); \overrightarrow{AB}=(3;-3) \Rightarrow 2\overrightarrow{AB}=(6;-6)$

Vì $DC=2AB \Rightarrow \overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=6 \\ y-2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-4 \end{cases} \Rightarrow C(4;-4)$

*) Trường hợp 2: $a=2 \Rightarrow A(2;2)$

Giả sử $B(x;y)$ ta có $\overrightarrow{AB}=(x-2;y-2); \overrightarrow{AM}=(0;2) \Rightarrow 3\overrightarrow{AM}=(0;6)$

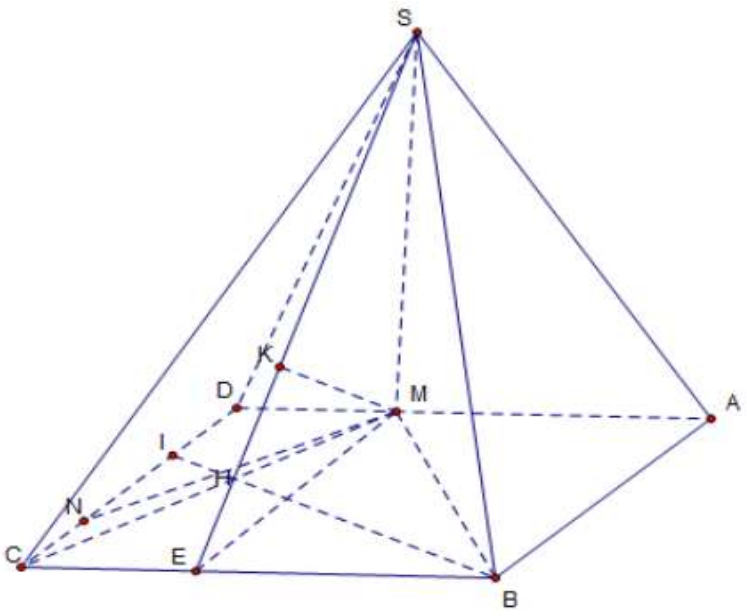
Vì $AB=3AM \Rightarrow \overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ y-2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases} \Rightarrow B(2;8)$

Giả sử $C(x;y)$ ta có $\overrightarrow{DC}=(x+2;y-2); \overrightarrow{AB}=(0;6) \Rightarrow 2\overrightarrow{AB}=(0;12)$

Vì $DC=2AB \Rightarrow \overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ y-2=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=14 \end{cases} \Rightarrow C(-2;14)$

b) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a. Biết hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{MD}$. Trên cạnh CD lấy các điểm I, N sao cho $ABM=MBI$ và MN vuông góc với BI. Biết góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.AMCB$ và khoảng cách từ N đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải



*) Tính thể tích khối chóp $S.AMCB$:

Ta có :

$$DM = \frac{AD}{3}, AM = \frac{2a}{3} \Rightarrow CM = \sqrt{DM^2 + CD^2}$$

$$SM \perp (ABCD) \Rightarrow SCM = 60° \Rightarrow SM = CM.\tan 60° = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Khi đó : $S_{AMCB} = \frac{(AM + CB).AB}{2} = \frac{5a^2}{6} \Rightarrow V_{S.AMCB} = \frac{1}{3}.SM.S_{AMCB} = \frac{5a^3\sqrt{30}}{54}$

*) Tính khoảng cách từ N đến mặt phẳng (SBC)

Ta có : $BM = \frac{a\sqrt{13}}{3} \Rightarrow \cos ABM = \frac{AB}{BM} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \cos IBM$

Đặt $DI = x \Rightarrow IM^2 = x^2 + \frac{a^2}{9}, IB = (a-x)^2 + a^2$.

Áp dụng định lý cosin ta có

$$IM^2 = MB^2 + IB^2 - 2MB.IB.\cos IBM \Leftrightarrow x^2 + \frac{a^2}{9} = (a-x)^2 + a^2 + \frac{13a^2}{9} - 2a.\sqrt{(a-x)^2 + a^2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7a}{12} \Rightarrow IB = \frac{13a}{12}$$

Gọi $H = MN \cap BI$ .Ta có $\Delta ABM = \Delta MBH \Rightarrow BH = AB = a, IH = IB - BH = \frac{a}{12}$

$\Delta CBI \sim \Delta HNI \Rightarrow \frac{BI}{NI} = \frac{CI}{HI} \Rightarrow NI = \frac{HI.BI}{CI} = \frac{13a}{60}, CN = CD - DI - IN = \frac{a}{5} \Rightarrow \frac{CN}{CD} = \frac{1}{5}$

Suy ra : $d\left(N,(SBC)\right) = \frac{1}{5}.d\left(D,(SBC)\right) = \frac{1}{5}d\left(M,(SBC)\right)$

Kẻ ME vuông góc với BC, MK vuông góc với SE. Suy ra : $MK = d\left(M.(SBC)\right)$

Ta có : $\frac{1}{MK^2} = \frac{1}{MS^2} + \frac{1}{ME^2} = \frac{13}{10a^2} \Rightarrow MK = \frac{a\sqrt{130}}{13}$

$\Rightarrow d\left(N,(SBC)\right) = \frac{1}{5}.\mathrm{d}\left(M,(SBC)\right) = \frac{a\sqrt{130}}{65}$

Câu 4 (3.0 điểm). Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $15^x + y^2 = 2^z$

Lời giải

Người Word hóa: Phạm Văn Chuyền ; Fb: Good Hope

Theo yêu cầu bài toán thì $2^z \geq 15+1 = 2^4 \Rightarrow z \geq 4$

Khi đó vế phải của phương trình đã cho chia hết cho 16. Do đó y phải là số lẻ.

Từ đó ta được:

$\begin{cases} y^2 \equiv 1 \pmod 8 \\ 15^x \equiv (-1)^x \pmod 8 \end{cases} \Rightarrow 15^x + y^2 \equiv (-1)^x + 1 \pmod 8$. Vì vậy ta cũng suy ra được x là số lẻ.

Ta lại lập luận tiếp để kết luận z phải là số chẵn bằng phản chứng như sau:

Nếu z là số lẻ thì $2^z = 2^{2n+1} = 2(3+1)^n = 2 \pmod 3$ và y^2 không thể chia 3 dư 2 nên ta có mâu thuẫn. Vì khi đó $2^z - y^2$ không thể chia hết cho 3 .

Vậy tới đây ta tiếp tục tìm nghiệm của phương trình đã cho với giả thiết là x, y đều lẻ, còn z là số chẵn.

Ta có $15^x + y^2 = 2^z \Leftrightarrow 15^x = \left(2^t - y\right)\left(2^t + y\right)$ với $t \geq 2$ là số nguyên thỏa mãn $z = 2t$

Ta nhận xét rằng

$\left(2^t - y\right) + \left(2^t + y\right) = 2.2^t$. Do đó $\left(2^t - y\right)$ và $\left(2^t + y\right)$ không thể cùng chia hết cho 3 hoặc 5.

Vì vậy $15^x=\left(2^t-y\right)\left(2^t+y\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^t-y=3^x\\2^t+y=5^x\end{cases}\\\begin{cases}2^t-y=1\\2^t+y=15^x\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^{t+1}=3^x+5^x\\y=\dfrac{5^x-3^x}{2}\end{cases}\quad(1)\\\begin{cases}2^{t+1}=1+15^x\\y=\dfrac{15^x-1}{2}\end{cases}\quad(2)\end{array}\right.$

Nếu $x=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=1\\t=2\end{cases}\\\begin{cases}y=7\\t=3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\y=1\\z=4\end{cases}\\\begin{cases}x=1\\y=7\\z=6\end{cases}\end{array}\right.$.

Nếu $x=2n+3,n\ge0$ thì từ $2^t=\dfrac{5^x+3^x}{2}\ge76\Rightarrow t\ge6\Rightarrow2^t=0\left(\bmod16\right)$. Ta có

$3^x=27\left(3\right)^{2n}=27\left(4-1\right)^{2n}=13\left(\bmod16\right)$; $5^x=125\left(4+1\right)^{2n}=13\left(\bmod16\right)$

Khi đó $3^x+5^x=26\left(\bmod16\right)$, ta kết luận $\left(1\right)$ vô nghiệm.

Tương tự như thế, nếu $x=2n+3,n\ge0$ thì từ

$2^t=\dfrac{15^x+1}{2}\ge1688\Rightarrow t\ge10\Rightarrow2^t=0\left(\bmod32\right)$.

Ta có $5^x=\left(16-1\right)^{2n+3}\equiv16\left(2n+3\right)-1\left(\bmod32\right)$. Khi đó $1+15^x=16\left(2n+3\right)\left(\bmod32\right)$, ta kết luận $\left(2\right)$ vô nghiệm.

Vậy các nghiệm nguyên dương là $\left(1;1;4\right)$ và $\left(1;7;6\right)$.

Câu 5 (3.0 điểm). Tính tổng

$$S=\frac{1}{2019}\left(C_{2019}^1\right)^2+\frac{2}{2018}\left(C_{2019}^2\right)^2+...+\frac{2018}{2}\left(C_{2019}^{2018}\right)^2+\frac{2019}{1}\left(C_{2019}^{2019}\right)^2.$$

Lời giải

Tác giả:Mai Ngọc Thi ; Fb: Mai Ngọc Thi

Xét số hạng tổng quát :

$$T_k=\frac{k}{2020-k}.\left(C_{2019}^k\right)^2=\frac{k}{2020-k}.\frac{2019!}{\left(2019-k\right)!k!}.C_{2019}^k=\frac{2019!}{\left(2020-k\right)!\left(k-1\right)!}.C_{2019}^k$$

$=C_{2019}^{k-1}.C_{2019}^{2019-k}$, $\forall k=1,2,...,2019$

Suy ra $S=C_{2019}^0.C_{2019}^{2018}+C_{2019}^1.C_{2019}^{2017}+...+C_{2019}^{2017}.C_{2019}^1+C_{2019}^{2018}.C_{2019}^0$

Xét

$$(1+x)^{2019}(1+x)^{2019}=\left(C_{2019}^{0}+C_{2019}^{1}x+...+C_{2019}^{2019}x^{2019}\right)\left(C_{2019}^{0}+C_{2019}^{1}x+...+C_{2019}^{2019}x^{2019}\right)$$

Hệ số của x^{2018} trong khai triển $(1+x)^{2019}(1+x)^{2019}$ là :

$$C_{2019}^{0}.C_{2019}^{2018}+C_{2019}^{1}.C_{2019}^{2017}+...+C_{2019}^{2017}.C_{2019}^{1}+C_{2018}^{2018}.C_{2019}^{0}\quad(1)$$

Xét khai triển : $(1+x)^{4038}=C_{4038}^{0}+C_{4038}^{1}x+...+C_{4038}^{2018}x^{2018}+...+C_{4038}^{4038}x^{4038}$

Hệ số của x^{2018} trong khai triển $(1+x)^{4038}$ là C_{4038}^{2018} (2)

Từ (1) và (2) ta có

$$S=\frac{1}{2019}\left(C_{2019}^{1}\right)^{2}+\frac{2}{2018}\left(C_{2019}^{2}\right)^{2}+...+\frac{2018}{2}\left(C_{2019}^{2018}\right)^{2}+\frac{2019}{1}\left(C_{2019}^{2019}\right)^{2}=C_{4038}^{2018}$$

ĐỀ HSG LỚP 12 TỈNH THÁI NGUYÊN

NĂM 2018 – 2019

MÔN TOÁN

TIME: 180 PHÚT

Câu 1 ***(4.0 điểm).*** Cho hàm số $y=x^3-3x^2+4$ có đồ thị (C), đường thẳng (d) đi qua $A(1;2)$ và có hệ số góc m. Tìm m để (d) cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $BC=4\sqrt{2}$.

Câu 2 ***(4 điểm).*** Giải phương trình $x^3-7x^2+9x+12=(x-3)\left(x-2+5\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x-3}-1\right)$.

Câu 3 ***(4.0 điểm).*** Cho dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ thỏa mãn $\begin{cases}u_1=2\\u_1+u_2+...+u_{n-1}+u_n=n^2u_n,\ n\ge 1\end{cases}$. Tìm giới hạn $\lim\left(n^2u_n\right)$.

Câu 4 ***(4.0 điểm).*** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB=a$. Gọi I là trung điểm của AC. Biết hình chiếu của S lên mặt phẳng ABC là điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{BI}=3\overrightarrow{IH}$ và góc giữa hai mặt phẳng (SAB); (SBC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ đã cho và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, SI theo a.

Bài 5 (*4.0 điểm*). Cho các số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $x^2+2y^2=\frac{8}{3}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=7(x+2y)-4\sqrt{x^2+2xy+8y^2}$.

GIẢI CHI TIẾT ĐỀ HSG LỚP 12 TỈNH THÁI NGUYÊN

NĂM 2018 – 2019

MÔN TOÁN

TIME: 180 PHÚT

Câu 1 (*4.0 điểm*). Cho hàm số $y=x^3-3x^2+4$ có đồ thị (C), đường thẳng (d) đi qua $A(1;2)$ và có hệ số góc m. Tìm m để (d) cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $BC=4\sqrt{2}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thế Quốc; Fb: Quốc Nguyễn.

Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm A có hệ số góc m là $y=m(x-1)+2$.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa (d) và (C)

$$x^3-3x^2+4=m(x-1)+2 \Leftrightarrow x^3-3x^2-mx+m+2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x-m-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ g(x)=x^2-2x-m-2=0 \end{array}\right.$$

Giả sử $g(x)=0$ có hai nghiệm x_1, x_2, trong đó x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của điểm B và C

Theo định lí Vi-et ta có

$$\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1x_2=-m-2 \end{cases}$$

Vì hai điểm B và C thuộc đường thẳng (d) nên $B(x_1;m(x_1-1)+2)$, $C(x_2;m(x_2-1)+2)$.

Khi đó $BC^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=(x_2-x_1)^2+\left[m(x_2-1)-m(x_1-1)\right]^2$

$$=(x_2-x_1)^2+\left[m(x_2-x_1)\right]^2=(x_2-x_1)^2(m^2+1)=(m^2+1)\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]$$

$$=(m^2+1)\left[4-4(-m-2)\right]=(m^2+1)[4m+12]=4m^3+12m^2+4m+12=32$$

$\Leftrightarrow m=1$.

Thử lại, thay $m=1$ vào $g(x)=x^2-2x-3=0\Leftrightarrow x_1=-1;x_2=3$ (thỏa mãn).

Vậy $m=1$.

Câu 2 ***(4 điểm).*** Giải phương trình $x^3-7x^2+9x+12=(x-3)\left(x-2+5\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x-3}-1\right)$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thành Biên ; Fb: BienNguyenThanh

Điều kiện $x-3\ge 0\Leftrightarrow x\ge 3$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x-4)(x^2-3x-3)=(x-3)\left(x-2+5\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x-3}-1\right)$$

$$\left(\sqrt{x-3}-1\right)\left(\sqrt{x-3}+1\right)(x^2-3x-3)=(x-3)\left(x-2+5\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x-3}-1\right)$$

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-3}-1=0\longrightarrow\sqrt{x-3}=1\Leftrightarrow x=4\\ \left(\sqrt{x-3}+1\right)(x^2-3x-3)=(x-3)\left(x-2+5\sqrt{x-3}\right)\qquad(*)\end{array}\right.$$

Dễ thấy $x=3$ không là nghiệm của phương trình đã cho.

Với $x>3$, giải phương trình $(*)$ ta được $\dfrac{x^2-3x-3}{x-3}=\dfrac{x-2+5\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+1}$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-4)^2+5(x-4)+1}{x-4+1}=\frac{x-3+5\sqrt{x-3}+1}{\sqrt{x-3}+1}\Leftrightarrow f(x-4)=f\left(\sqrt{x-3}\right).$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+5t+1}{t+1}$ trên $(-1;+\infty)$, có $f'(t)=1+\dfrac{3}{(t+1)^2}>0,\forall t>-1$.

Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(-1;+\infty)$ mà $f(x-4)=f\left(\sqrt{x-3}\right)$.

Do đó $x-4=\sqrt{x-3}\Leftrightarrow\begin{cases}x-4\ge 0\\(x-4)^2=x-3\end{cases}.\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 4\\x^2-9x+19=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{9+\sqrt{5}}{2}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=4$; $x=\dfrac{9+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 3 *(4.0 điểm)*. Cho dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ thỏa mãn $\begin{cases} u_1=2 \\ u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}+u_n=n^2u_n, n\ge 1 \end{cases}$. Tìm giới hạn $\lim\left(n^2u_n\right)$.

Lời giải

Tác giả: HoàngQuyên ; Fb: HoàngQuyên

Theo giả thiết ta có :

$$(n+1)^2u_{n+1}=(u_1+u_2+\ldots+u_n)+u_{n+1}=n^2u_n+u_{n+1}$$

$$\Rightarrow\left(n^2+2n\right)u_{n+1}=n^2u_n\Rightarrow(n+2)u_{n+1}=nu_n$$

$$\Rightarrow u_{n+1}=\frac{n}{n+2}u_n=\frac{n}{n+2}.\frac{n-1}{n+1}u_{n-1}=\frac{n}{n+2}.\frac{n-1}{n+1}.\frac{n-2}{n}u_{n-2}$$

$$=\ldots=\frac{n}{n+2}.\frac{n-1}{n+1}.\frac{n-2}{n}\ldots\frac{3}{5}.\frac{2}{4}.\frac{1}{3}u_1=\frac{4}{(n+2)(n+1)}$$

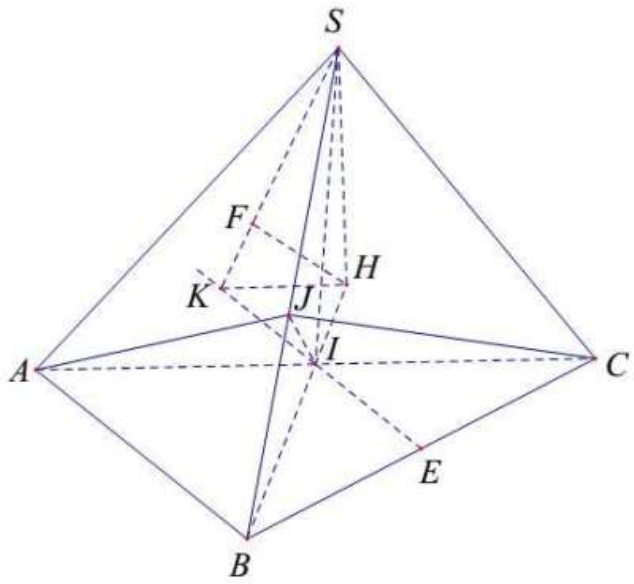
$$\Rightarrow u_n=\frac{4}{n(n+1)}\Rightarrow n^2u_n=\frac{4n}{n+1}\Rightarrow\lim n^2u_n=\lim\left(\frac{4n}{n+1}\right)=4$$

Câu 4 *(4.0 điểm)*. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB=a$. Gọi I là trung điểm của AC. Biết hình chiếu của S lên mặt phẳng ABC là điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{BI}=3\overrightarrow{IH}$ và góc giữa hai mặt phẳng (SAB); (SBC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ đã cho và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, SI theo a.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thùy Linh; Fb:Nguyễn Thùy Linh

Cách 1:



a) Từ giả thiết của bài toán ta có $\begin{cases} BH \perp AC \\ SH \perp AC \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBH) \Rightarrow AC \perp SB$.

Kẻ $IJ \perp SB \Rightarrow \begin{cases} AJ \perp SB \\ CJ \perp SB \end{cases} \Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCB) bằng góc giữa hai đường thẳng AJ và CJ .

Dễ thấy ΔAIJ là tam giác cân tại J, kết hợp với giả thiết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng 60^0 ta có hai trường hợp sau :

TH1: $AJC = 60^0 \Rightarrow AJI = 30^0$ **.**

Ta có $IJ = AI.\tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \Delta BIJ$ vuông tại J có $BI = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} < IJ$ (Loại) .

TH2: $AJC = 120^0 \Rightarrow AJI = 60^0$.

Ta có $IJ = AI.\tan 30^0 = \dfrac{a}{\sqrt{6}} \Rightarrow \Delta BIJ$ vuông tại J có $BJ = \sqrt{BI^2 - IJ^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$\Delta BIJ \sim \Delta BSH \Rightarrow SH = \dfrac{IJ.BH}{BJ}$. Mặt khác $IB = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow BH = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Ta có $SH = \dfrac{2a}{3} \Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = \dfrac{a^3}{9}$ (đvtt).

b) Gọi E là trung điểm của $BC \Rightarrow IE \| AB$. Do vậy ta có
$d(AB, SI) = d(AB, (SIE)) = d(B, (SIE))$.

Do $\overrightarrow{BI}=3\overrightarrow{IH}\Rightarrow d\left(B,(SIE)\right)=3d\left(H,(SIE)\right)$.

Kẻ $HK\perp IE$, $K\in IE$.

Mặt khác ta lại có $SH\perp(ABC)\Rightarrow SH\perp IE\Rightarrow IE\perp(SHK)\Rightarrow(SIE)\perp(SHK)$.

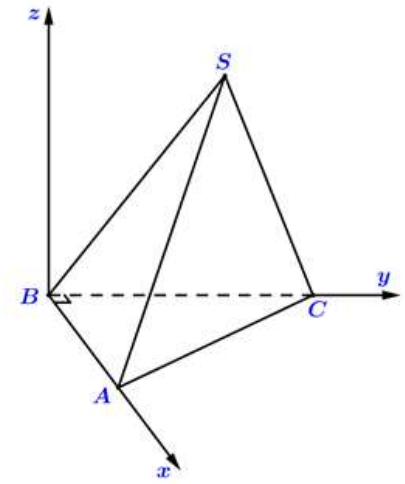
Kẻ $HF\perp SK\Rightarrow HF\perp(SIE)\Rightarrow d\left(H,(SIE)\right)=HF\Rightarrow d(AB,SI)=3HF$.

Xét tam giác vuông SHK ta có : $\dfrac{1}{HF^2}=\dfrac{1}{HK^2}+\dfrac{1}{HS^2}\Rightarrow HF=\dfrac{SH.HK}{\sqrt{SH^2+HK^2}}$.

Mặt khác $\dfrac{HK}{BE}=\dfrac{IH}{IB}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow HK=\dfrac{1}{3}BE=\dfrac{a}{6}\Rightarrow HF=\dfrac{2a\sqrt{17}}{51}$.

Vậy $d(AB,SI)=3HF=\dfrac{2a\sqrt{17}}{17}$.

Cách 2:



Chọn hệ trục tọa độ $Bxyz$ với $A\in Bx, C\in By, Bz // SH$. Không mất tính tổng quát ta chọn $a=1$.

Ta có : $B(0;0;0)$, $A(1;0;0)$, $C(0;1;0)\Rightarrow I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$.

Do $\overrightarrow{BI}=3\overrightarrow{IH}\Rightarrow H\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};0\right)$. Gọi $S\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};h\right)$ với $h>0$.

$\overrightarrow{BA}=(1;0;0)$, $\overrightarrow{BS}=\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};h\right)$, $\overrightarrow{BC}=(0;1;0)$.

$\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BS}\right]=\left(0;-h;\dfrac{2}{3}\right)$, $\overrightarrow{n_2}=\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BS}\right]=\left(h;0;-\dfrac{2}{3}\right)$.

Do góc giữa (SAB) và (SBC) bằng 60^0 nên $\cos 60^0 = \dfrac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|} \Rightarrow h = \dfrac{2}{3} \Rightarrow S\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$.

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{9}$. Do chọn $a=1$ nên $V_{S.ABC} = \dfrac{a^3}{9}$ (đvtt).

Ta có : $\overrightarrow{BA} = (1;0;0)$, $\overrightarrow{SI} = \left(-\dfrac{1}{6};-\dfrac{1}{6};0\right)$, $\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{SI}\right] = \left(0;0;-\dfrac{1}{6}\right)$, $\overrightarrow{BI} = \left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$.

$d(AB,SI) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{SI}\right].\overrightarrow{BI}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{SI}\right]\right|} = \dfrac{2\sqrt{17}}{17}$. Do chọn $a=1$ nên $d(AB,SI) = \dfrac{2a\sqrt{17}}{17}$.

Bài 5 (*4.0 điểm*). Cho các số thực dương x,y thỏa mãn điều kiện $x^2+2y^2 = \dfrac{8}{3}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 7(x+2y) - 4\sqrt{x^2+2xy+8y^2}$.

Lời giải

Ta có: $4\sqrt{x^2+2xy+8y^2} = \sqrt{16x^2+32xy+128y^2} = \sqrt{7(x-2y)^2+(3x+10y)^2} \ge 3x+10y$ (1).

Suy ra $P = 7(x+2y) - 4\sqrt{x^2+2xy+8y^2} \le 7(x+2y) - (3x+10y) = 4(x+y)$.

Mặt khác: $x+y = \left(1.x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}y\right) \le \sqrt{\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(x^2+2y^2\right)} = 2 \Rightarrow P \le 4.2 = 8$ (2).

Dấu đẳng thức xảy ra ở (1) và (2) khi và chỉ khi $\begin{cases} 7(x-2y)^2 = 0 \\ \dfrac{x}{1} = \dfrac{\sqrt{2}y}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}} \\ x^2+2y^2 = \dfrac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{3} \\ y = \dfrac{2}{3} \end{cases}$.

Vậy GTLN $P = 8$ đạt được khi $\begin{cases} x = \dfrac{4}{3} \\ y = \dfrac{2}{3} \end{cases}$.

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

NAM ĐỊNH

NĂM HỌC 2018 – 2019

Môn: Toán TN(Bài độc lập). Lớp: 12

Thời gian làm bài: 60 phút

Câu 1. **[2D3-2.1-1]** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x=7, \int_3^{10} f(x)\mathrm{d}x=3, \int_3^6 f(x)\mathrm{d}x=1$. Tính giá trị của $I=\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x$

A. 4. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x+\int_3^6 f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow 7=\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x+1 \Rightarrow \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=6$.

Vậy $I=\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x+\int_3^{10} f(x)\mathrm{d}x=6+3=9$.

Câu 2. **[2D1-4.1-1]** Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{3-x}}{x^3-8x^2+20x-16}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Ta có $x^3-8x^2+20x-16=(x-2)^2(x-4)$.

Khi đó $y=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{3-x}}{(x-2)^2(x-4)}$. Ta có $(x-2)^2(x-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$

Điều kiện xác định của hàm số $\begin{cases} x\ge 0 \\ 3-x\ge 0 \\ x^3-8x^2+20x-16\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 3 \\ x\ne 2 \end{cases}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{3-x}}{(x-2)^2(x-4)}=-\infty$. Vậy đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng của hàm số là $x=2$.

Câu 3. **[2H1-3.3-2] [2D2-4.1-1]** Tìm tập xác định D của hàm số $y=e^{\sqrt{x}}+\log_2\dfrac{x-2}{1-x}$

A. $D=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

B. $D=(1;2)$.

C. $\mathbb{R}/\{1;2\}$.

D. $\mathbb{R}/\{1\}$.

Lời giải

Tác giả: NGUYỄN TIẾN LỢI; Fb: NGUYỄN TIẾN LỢI

Chọn B

Điều kiện xác định của hàm số $\begin{cases} x\ge 0 \\ \dfrac{x-2}{1-x}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 1<x<2 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<2$.

Vậy $D=(1;2)$ là tập xác định của hàm số.

Câu 4. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V với M,N lần lượt là trung điểm AB,CD. Gọi V_1,V_2 lần lượt là thể tích của $MNCB$ và $MNDA$. Tính tỉ lệ $\dfrac{V_1+V_2}{V}$

A. 1.

B. $\dfrac{1}{2}$.

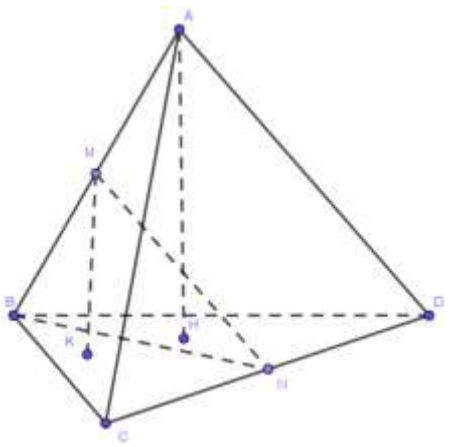
C. $\dfrac{1}{3}$.

D. $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Tác giả: NGUYỄN TIẾN LỢI; Fb: NGUYỄN TIẾN LỢI

Chọn B



Dựng MK, AH vuông góc với mặt phẳng (BCD). Dựa theo định lý Thales thì $MK = \frac{1}{2}AH\,(1)$.

Lại do N là trung điểm của CD nên $S_{\Delta BCN} = \frac{1}{2}S_{\Delta BCD}\,(2)$.

Từ (1) và $(2) \Rightarrow V_1 = \frac{1}{4}V$.

Tương tự ta cũng suy ra được $V_2 = \frac{1}{4}V$.

Vậy $\frac{V_1 + V_2}{V} = \frac{\frac{1}{4}V + \frac{1}{4}V}{V} = \frac{1}{2}$.

Câu 5. **[2H1-3.3-2]** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O' là giao điểm của AC và BD. Tính tỷ số giữa thể tích khối chóp $O.A'B'C'D'$ và thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Tác giả:Lánh Vũ Thị Ngọc

Chọn D

Gọi $h = d\left((ABCD),(A'B'C'D')\right)$. Khi đó $h = d\left(O',(A'B'C'D')\right)$ (Vì $O' \in (ABCD)$)

Ta có $V_{O'.A'B'C'D'} = \frac{1}{3}h.S_{A'B'C'D'}$ và có $V_{ABCD.A'B'C'D'} = h.S_{A'B'C'D'}$

$\Rightarrow \frac{V_{O'.A'B'C'D'}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{3}$.

Câu 6. **[1D3-3.3-1]** Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -3$, công sai $d = 3$. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $u_5 = 7$. **B.** $u_4 = 5$. **C.** $u_6 = 9$. **D.** $u_3 = 3$.

Lời giải

Tác giả:Lánh Vũ Thị Ngọc

Chọn D

Vì $u_n = u_1 + (n-1)d \Rightarrow u_3 = -3 + 2.3 = 3$.

Câu 7. [2D1-5.3-2] Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$-$	
y	-3 ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3

Tìm điều kiện cần và đủ của tham số m để đường thẳng $d: y = 2m+1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại hai điểm phân biệt?

A. $m \in (-\infty;-2) \cup [1;+\infty)$.

B. $m \in (-\infty;-2) \cup (1;+\infty)$

C. $m \in (-\infty;-2] \cup (1;+\infty)$.

D. $m \in (-2;1)$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Phương; Fb: phuongnguyen

Chọn B

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$-$	
y	-3 ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$y=2m+1$ 3 $y=2m+1$

Đường thẳng $d: y = 2m+1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại hai điểm phân biệt khi

$$\left[\begin{array}{l} 2m+1 < -3 \\ 2m+1 > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 1 \end{array}\right..$$

Vậy $m \in (-\infty;-2) \cup (1;+\infty)$.

Câu 8. [2D2-5.3-1] Biết rằng phương trình $4^x - 3.2^x + m = 0$ có một nghiệm $x = 0$. Tính nghiệm còn lại.

A. 1. **B.** -1. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Phương; Fb:phuongnguyen

Chọn A

Phương trình $4^x - 3.2^x + m = 0$ có một nghiệm $x = 0 \Leftrightarrow 4^0 - 3.2^0 + m = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

Với $m = 2$ phương trình có dạng: $4^x - 3.2^x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 1 \\ 2^x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Vậy nghiệm còn lại của phương trình là $x = 1$.

Câu 9. **[2D1-5.6-1]** Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ song song với trục hoành là:

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Tiết Hạnh; Fb: Hạnh Tiết Tiết

Chọn D

Ta có $y = -x^4 + 2x^2 \Rightarrow y' = -4x^3 + 4x$

Gọi điểm $M(x_0 ; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2$.

Do tiếp tuyến song song trục hoành: $y = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow -4x_0^3 + 4x_0 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0 \\ x_0 = \pm 1 \Rightarrow y_0 = 1 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến là: $y = 0$ (loại do tiếp tuyến trùng với trục hoành) và $y = 1$(nhận).

Vậy có 1 tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ song song với trục hoành.

Câu 10. **[2D1-2.1-1]** Giá trị cực tiểu của hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 7$ là:

A. 0. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 2.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Tiết Hạnh; Fb: Hạnh Tiết Tiết

Chọn B

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$y'=x^3-4x$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=7 \\ x=\pm 2 \Rightarrow y=3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	7	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy giá trị cực tiểu của hàm số $y=\frac{1}{4}x^4-2x^2+7$ bằng 3.

Câu 11. **[2D1-1.1-1]** Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+2019$ nghịch biến trên

A. $(-1;3)$.

B. $(-\infty;1)$.

C. $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$.

D. $(3;+\infty)$.

Lời giải

Tác giả: Trịnh Đình Hiểu; Fb: Trịnh Đình Hiểu

Chọn A

Ta có: $y'=x^2-2x-3$. $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu y'

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy: Hàm số nghịch biến trên $(-1;3)$

Câu 12. **[1D2-2.1-1]** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có sáu chữ số khác nhau?

A. 600.

B. 240.

C. 720.

D. 625.

Lời giải

Tác giả: Trịnh Đình Hiểu; Fb: Trịnh Đình Hiểu

Chọn A

Gọi số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau là $\overline{abcdef}$ với $a \neq 0$; $a,b,c,d,e,f \in \{0;1;2;3;4;5\}$

Số cách chọn chữ số a: có 5 cách

Số cách sắp xếp 5 chữ số còn lại vào 5 vị trí $b;c;d;e;f$: có $5!$ cách

Vậy có tất cả $5.5! = 600$ số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 13. **[2H3-1.1-2]** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm A,B,C với $M(1;-2;2)$ là trung điểm BC. Biết $\overrightarrow{AB} = (0;1;-2)$, $\overrightarrow{AC} = (-2;-1;0)$. Tìm tọa độ điểm A.

A. $A(-1;1;-2)$. **B.** $A(-2;2;-3)$. **C.** $A(0;2;-3)$. **D.** $A(2;-2;3)$.

Lời giải

Tác giả: Hạ Kim Cương ; Fb: Hạ Kim Cương

Chọn D

Gọi tọa độ điểm $A(x;y;z)$, suy ra $\overrightarrow{AM} = (1-x;-2-y;2-z)$

Ta có, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 = 2(1-x) \\ 0 = 2(-2-y) \\ -2 = 2(2-z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow A(2;-2;3)$$

Câu 14. **[2D1-3.1-2]** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{4-x^2}$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Tác giả: Hạ Kim Cương ; Fb: Hạ Kim Cương

Chọn A

TXĐ: $D = [-2;2]$

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}},\ y' = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$y(-2) = y(2) = 0$,

$y(0) = 2$,

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 2.

Câu 15. **[2H2-1.1-1]** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho một hình trụ có tọa độ hai tâm của hai đáy lần lượt là $I(1;2;3)$ và $J(2;3;4)$. Biết rằng bán kính đáy của hình trụ là $R=\sqrt[4]{3}$. Tính thể tích của khối trụ.

A. 3π. **B.** $\pi\sqrt{3}$. **C.** $3\pi\sqrt{3}$. **D.** $3\pi\sqrt[4]{3}$.

Lời giải

Tác giả: Phạm Thái; Fb: Phạm Thái

Chọn A

Chiều cao khối trụ: $h=IJ=\sqrt{(2-1)^2+(3-2)^2+(4-3)^2}=\sqrt{3}$

Vậy thể tích của khối trụ : $V=\pi R^2h=\pi\left(\sqrt[4]{3}\right)^2\sqrt{3}=3\pi$.

Câu 16. **[2D2-4.3-1]** Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên tập xác định của nó?

A. $y=\log_{\sqrt{3}}x$. **B.** $y=\log_{\pi}x$. **C.** $y=\log_{\frac{e}{\pi}}x$. **D.** $y=\ln x$.

Lời giải

Tác giả: Phạm Thái; Fb: Phạm Thái

Chọn C

Hàm số $y=\log_{\frac{e}{\pi}}x$ có cơ số bằng $\frac{e}{\pi}<1$ nên nghịch biến trên tập xác định của nó.

Câu 17. **[2D2-4.1-1]** Hàm số $\ln\left|x^2-9\right|$ không xác định tại bao nhiêu số nguyên?

A. 2 **B.** 4. **C.** 5. **D.** vô số.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $\ln\left|x^2-9\right|$ xác định khi:

$$\left|x^2-9\right|>0\Leftrightarrow x\neq\pm3$$

Vậy hàm số không xác định tại 2 giá trị nguyên của x .

Câu 18. **[2D3-2.1-2]** Cho hàm số $f(x)=\cos(\pi\ln x)$. Tính tích phân $I=\int_1^e f'(x)dx$.

A. $I=-2$ **B.** $I=2$. **C.** $I=2\pi$. **D.** $I=-2\pi$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $I=\int_1^e f'(x)dx=f(x)\Big|_1^e=\cos(\pi\ln x)\Big|_1^e=-2$.

Câu 19. **[2H3-3.3-2]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng $(P):2x-2y+z+3=0$ thỏa mãn $AM=4$ với điểm $A(1;-2;3)$. Tính $a+b+c$.

A. $\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** 2. **D.** 12.

Lời giải

Tác giả: nguyễn Thị Dung FB: dungbt nguyen

Chọn B

Ta có $d(A,(P))=\frac{|2+4+3+3|}{3}=4\Rightarrow d(A,(P))=AM$

$\Rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên (P)

$\Rightarrow$ đường thẳng AM đi qua A và có vectơ chỉ phương chính là vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{u}_{AM}=\vec{n}(2;-2;1)$

$$\Rightarrow AM:\begin{cases}x=1+2t\\y=-2-2t\\z=3+t\end{cases}.$$

$M\in AM\Rightarrow M(1+2t;-2-2t;3+t)$

Mà $M\in(P)\Rightarrow 2(1+2t)-2(-2-2t)+3+t+3=0\Leftrightarrow t=-\frac{4}{3}\Rightarrow M\left(-\frac{5}{3};\frac{2}{3};\frac{5}{3}\right)$.

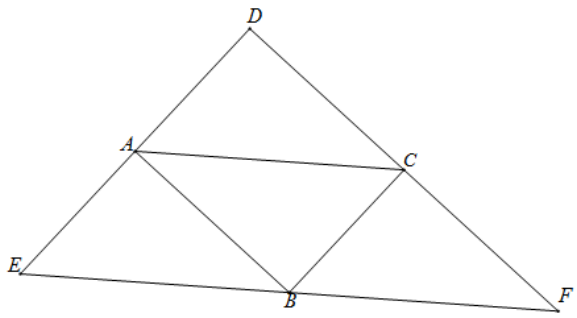
Khi đó, $a+b+c=-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{2}{3}$.

Câu 20. **[2H3-2.1-2]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0),C(0;0;-2)$. Biết rằng có ba điểm phân biệt D,E,F sao cho mỗi điểm đó tạo với A,B,C thành hình bình hành. Tính diện tích tam giác DEF.

A. $3\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $4\sqrt{6}$. **D.** $2\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C



Theo giả thiết, ta suy ra A, B, C chính là trung điểm của các cạnh của ΔDEF

$\Rightarrow S_{DEF} = 4S_{ABC}$.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB}(-1;2;0) \\ \overrightarrow{AC}(-1;0;-2) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-4;-2;2)$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}.\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}.\sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$.

Vậy, $S_{DEF} = 4\sqrt{6}$.

Câu 21. **[2D1-1.5-3]** Gọi S là tập các giá trị nguyên của m sao cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + mx + 2018$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ và đồng biến trên khoảng $(3;4)$. Tính số phần tử của S.

A. 10. **B.** 9. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = x^2 - 2x + m$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ và đồng biến trên khoảng $(3;4)$ khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \le 1 < 2 \le x_2 \le 3$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

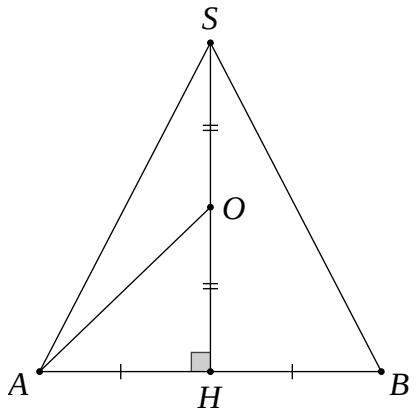
$$\begin{cases} 1 - m > 0 \\ 1 - \sqrt{1-m} \le 1 \\ 2 \le 1 + \sqrt{1-m} \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ 1 \le \sqrt{1-m} \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ -3 \le m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \le m \le 0.$$

Suy ra $S=\{-3;-2;-1;0\}$.

Câu 22. **[2H2-4.1-3]**Cho hai mặt phẳng (P), (Q) song song với nhau cắt khối cầu tâm O, bán kính R tạo thành hai hình tròn cùng bán kính. Xét hình nón có đỉnh trùng với tâm của một trong hai hình tròn, đáy trùng với hình tròn còn lại. Tính khoảng cách giữa (P), (Q) để diện tích xung quanh của hình nón là lớn nhất.

A. R. **B.** $R\sqrt{2}$. **C.** $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2R\sqrt{3}$.

Lờigiải



Chọn C

Cắt hình nón bởi mặt phẳng qua trục, ta được thiết diện như hình trên. Khi đó, ta có $OA=R$.

Đặt $OH=x$, ta có $SH=2x$, $AH=\sqrt{R^2-x^2}$, $SA=\sqrt{R^2+3x^2}$.

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq}=\pi AH\cdot SA=\pi\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{R^2+3x^2}$.

Ta có $\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{R^2+3x^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3R^2-3x^2}\cdot\sqrt{R^2+3x^2}\le\frac{2R^2\sqrt{3}}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $3R^2-3x^2=R^2+3x^2\Leftrightarrow x=\frac{R\sqrt{3}}{3}$.

Câu 23. **[2D1-3.1-3]** Gọi M,N lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=|x|+\cos 2x$ trên $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$.

A. $-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}-2}{2}$. **C.** $\frac{\pi}{4}-1$. **D.** $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=\sqrt{x^2}+\cos 2x$.

$y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}-2\sin 2x, \forall x\neq 0$.

+) y' không xác định tại $x=0$.

+) $y'=0 \Leftrightarrow x-2|x|.\sin 2x=0$.

Với $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$: $y'=0 \Leftrightarrow x-2x\sin 2x=0 \Leftrightarrow \sin 2x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{12}$.

Với $x\in\left(-\dfrac{\pi}{4};0\right)$: $y'=0 \Leftrightarrow x+2x\sin 2x=0 \Leftrightarrow \sin 2x=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{12}$.

Ta có : $y(0)=1$

$y\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$y\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{4}$

$y\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{4}$

Suy ra $M=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $N=\dfrac{\pi}{4}$.

Vậy $M-N=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6}$.

Câu 24. **[2D1-2.5-2]** Hàm số $y=mx^4+(m^2+m)x^2-2019$ có đúng một điểm cực trị khi và chỉ khi

A. $m\in(-1;0)\cup(0;+\infty)$.

B. $m\in(-\infty;-1)$.

C. $m\in[-1;+\infty)$.

D. $m\in[-1;0)\cup(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

+)Trường hợp 1. $m=0$: $y=-2019$, hàm số không có điểm cực trị nên $m=0$ không thỏa mãn.

+) Trường hợp 2. $m\neq 0$: Hàm số đã cho là hàm trùng phương.

Hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị khi và chỉ khi $m\left(m^2+m\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow m^2\left(m+1\right)\geq 0 \Leftrightarrow m\geq -1$.

Đối chiếu điều kiện $m\neq 0$ ta được $m\in\left[-1;0\right)\cup\left(0;+\infty\right)$.

Vậy $m\in\left[-1;0\right)\cup\left(0;+\infty\right)$ là các giá trị cần tìm.

Câu 25. **[2D3-2.2-2]** Biết rằng $\int\limits_0^{\pi^2}\left(\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=a+b\pi$ với a, $b\in\mathbb{R}$. Tính $a+b$.

A. π. **B.** -4. **C.** -2. **D.** 2.

Lời giải

Tác giả: Phạm Văn Nghiệp; Fb: Phạm Văn Nghiệp

Chọn C

Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow t^2=x\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$; $x=\pi^2\Rightarrow t=\pi$.

Khi đó: $\int\limits_0^{\pi^2}\left(\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=2\int\limits_0^{\pi}t\left(\sin t+\cos t\right)\mathrm{d}t=2\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi}t\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}t$.

Xét $H=\int\limits_o^{\pi}t\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}t$. Đặt $u=t\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}t$; $\mathrm{d}v=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}t$, chọn $v=-\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$.

Khi đó: $H=-t\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\pi}+\int\limits_0^{\pi}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}t=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}+\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}$.

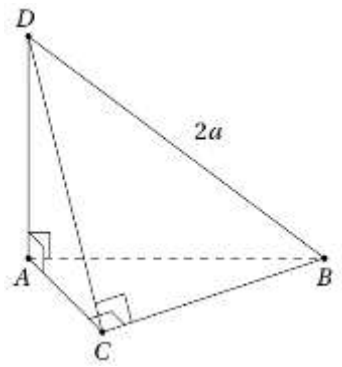
Vậy $\int\limits_0^{\pi^2}\left(\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=2\sqrt{2}H=-4+2\pi\Rightarrow\begin{cases}a=-4\\b=2\end{cases}\Rightarrow a+b=-2$.

Câu 26. **[2H2-2.2-2]** Cho tứ diện $ABCD$ có bốn mặt là tam giác vuông và cạnh lớn nhất có độ dài bằng $2a$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $\frac{32}{3}\pi a^3$. **B.** $\frac{4}{3}\pi a^3$. **C.** $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi a^3$. **D.** $4\pi a^3$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử $BD = 2a$ là cạnh lớn nhất. Do bốn mặt của tứ diện $ABCD$ là các tam giác vuông nên các tam giác ABD và CBD là các tam giác vuông cạnh huyền BD.

Do đó $BAD = BCD = 90°$ nên A, B, C, D thuộc mặt cầu đường kính BD.

Suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là $R = \frac{BD}{2} = a$.

Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là: $V = \frac{4}{3}\pi a^3$.

Câu 27. **[2H3-1.4-3]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(4;1;5)$, $B(3;0;1)$, $C(-1;2;0)$ và điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} - 5\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ lớn nhất. Tính $P = a - 2b + 4c$.

A. $P = 23$. **B.** $P = 31$. **C.** $P = 11$. **D.** $P = 13$.

Lời giải

Tác giả: Trần Anh Tuấn; Fb: Trần Anh Tuấn

Chọn D

Ta có: $\overrightarrow{MA} = (4-a;1-b;5-c), \overrightarrow{MB} = (3-a;-b;1-c), \overrightarrow{MC} = (-1-a;2-b;-c)$

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} - 5\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}\\
&= (4-a)(3-a) + (1-b)(-b) + (5-c)(1-c)\\
&+2(3-a)(-1-a) + 2(-b)(2-b) + 2(1-c)(-c)\\
&-5(4-a)(-1-a) - 5(1-b)(2-b) - 5(5-c)(-c)\\
&= -2a^2 - 2b^2 - 2c^2 + 4a + 10b + 17c + 21\\
&= -2(a-1)^2 - 2\left(b - \frac{5}{2}\right)^2 - 2\left(c - \frac{17}{4}\right)^2 + \frac{573}{8} \le \frac{573}{8}
\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a=1 \\ b=\dfrac{5}{2} \\ c=\dfrac{17}{4} \end{cases}$. Khi đó $P=a-2b+4c=13$.

Câu 28. **[2D1-2.5-3]** Hàm số trùng phương $y=f(x)=x^4+ax^2+b$ có giá trị cực tiểu bằng 2 và giá trị cực đại bằng 4. Tìm điều kiện cần và đủ của m để $f(x)=m$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt?

A. $m\in\{4\}$.

B. $m\in\{2\}\cup(4;+\infty)$.

C. $m\in(2;4)$.

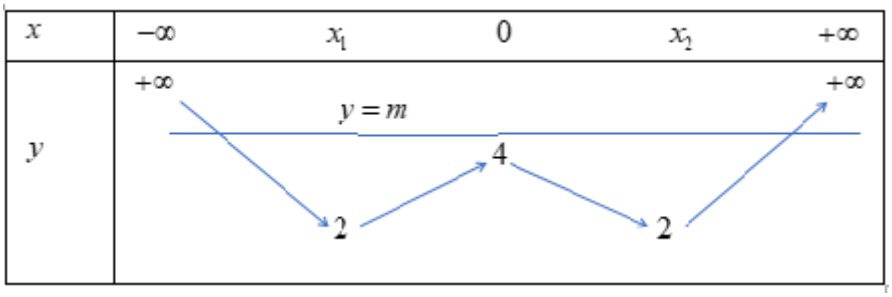
D. $m\in(-\infty;2)\cup[4;+\infty)$.

Lời giải

Tác giả: Trần Anh Tuấn; Fb: Trần Anh Tuấn

Chọn B

Từ giả thiết ta có bảng biến thiên của hàm số như sau:



Dựa vào bảng biến thiên ta có điều kiện cần và đủ của m để $f(x)=m$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt là $m\in\{2\}\cup(4;+\infty)$.

Câu 29. **[2D2-3.1-3]** Với a,b,c là các số thực lớn hơn 1, đặt $x=\log_a(bc)$, $y=\log_b(ca)$, $z=\log_c(ab)$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y+4z$

A. 6. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 16.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Tuyết Hằng; Fb: Hang Tuyet

Chọn C

Ta có:

$x=\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$.

$y=\log_b(ca)=\log_b c+\log_b a$.

$z=\log_c(ab)=\log_c a+\log_c b$.

Đặt: $A=\log_a b,\ B=\log_b c,\ C=\log_c a$ với $A,B,C>0$ (do $a,b,c>1$)

Khi đó: $P=x+y+4z=A+\frac{1}{C}+B+\frac{1}{A}+4C+\frac{4}{B}=\left(A+\frac{1}{A}\right)+\left(B+\frac{4}{B}\right)+\left(4C+\frac{1}{C}\right)$.

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số thực dương:

$A+\frac{1}{A}\ge 2\sqrt{A.\frac{1}{A}}=2$. Đẳng thức xảy ra khi $A=1\Leftrightarrow a=b$.

$B+\frac{4}{B}\ge 2\sqrt{B.\frac{4}{B}}=4$. Đẳng thức xảy ra khi $B=2\Leftrightarrow \log_b c=2\Leftrightarrow c=b^2$.

$4C+\frac{1}{C}\ge 2\sqrt{4C.\frac{1}{C}}=4$. Đẳng thức xảy ra khi $C=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \log_c a=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=\sqrt{c}$.

Suy ra : $P\ge 10$.

Vậy $\min P=10$ khi $\begin{cases} a=b \\ c=a^2=b^2 \end{cases}$.

Câu 30. **[2D3-3.3-3]** Thể tích của khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=x^2-2x$, $y=4-x^2$ khi nó quay quanh trục hoành là

A. 27π. **B.** 30π. **C.** $\frac{125}{3}\pi$. **D.** $\frac{421}{15}\pi$.

Lời giải

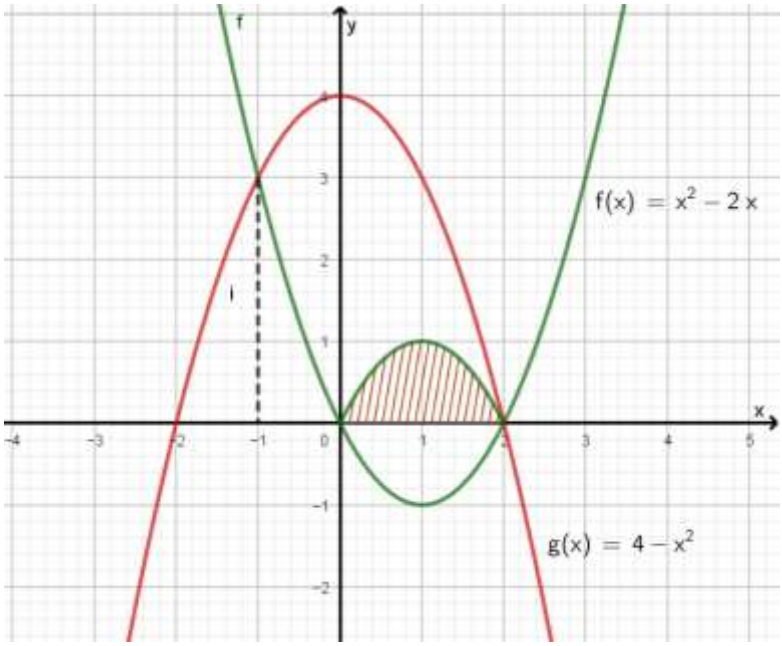
Tác giả: Nguyễn Thị Tuyết Hằng; Fb: Hang Tuyet

Chọn D

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-2x=4-x^2\Leftrightarrow 2x^2-2x-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$

.

Lấy đối xứng phần đồ thị trên đoạn $[0;2]$ của hàm số $y = x^2 - 2x$ qua trục hoành. Ta nhận thấy phần đồ thị nằm phía dưới trục hoành khi quay sẽ "nằm" trong phần giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 4 - x^2$ và trục hoành.



Khi đó, ta có thể tích của vật thể cần tìm là:

$$V = \pi\int_{-1}^{0}\left[\left(4-x^2\right)^2 - \left(x^2-2x\right)^2\right]dx + \pi\int_{0}^{2}\left(4-x^2\right)^2 dx = 11\pi + \frac{256}{15}\pi = \frac{421}{15}\pi .$$

Câu 31. **[2D3-2.2-3]** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^3 xf'(2x-4)dx = 8$ và $f(2) = 2$. Tính $I = \int_{-2}^{1} f(2x)dx$.

A. $I = -10$. **B.** $I = -5$. **C.** $I = 5$. **D.** $I = 10$.

Lời giải

Đặt $2x - 4 = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$. Từ $\int_0^3 xf'(2x-4)dx = 8$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\int_{-4}^{2}(t+4)f'(t)dt = 8 \Rightarrow \int_{-4}^{2}(t+4)f'(t)dt = 32$$

$$\Rightarrow \int_{-4}^{2}(t+4)f'(t)dt = (t+4)f(t)\Big|_{-4}^{2} - \int_{-4}^{2} f(t)dt = 32$$

$$\Rightarrow \int_{-4}^{2} f(t)\mathrm{d}t = 6f(2) - 32 = -20$$

Mà $I = \int_{-2}^{1} f(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-2}^{1} f(2x)\mathrm{d}(2x) = \frac{1}{2}\int_{-4}^{2} f(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\times(-20) = -10$

Câu 32. **[2D1-4.2-3]** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{2019x}{\sqrt{17x^2-1} - m|x|}$ có bốn đường tiệm cận (bao gồm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang). Tính số phần tử của tập S.

A. Vô số. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Tiệm cận ngang

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{2019x}{\sqrt{17x^2-1} - m|x|} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2019x}{x\sqrt{17-\frac{1}{x^2}} - mx} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2019x}{x\left(\sqrt{17-\frac{1}{x^2}} - m\right)}$$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2019}{\sqrt{17-\frac{1}{x^2}} - m} = \frac{2019}{\sqrt{17}-m}$ là hằng số xác định với điều kiện $m \neq \sqrt{17}$.

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{2019x}{\sqrt{17x^2-1} - m|x|} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2019x}{-x\sqrt{17-\frac{1}{x^2}} + mx} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2019x}{x\left(-\sqrt{17-\frac{1}{x^2}} + m\right)}$$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2019}{-\sqrt{17-\frac{1}{x^2}} + m} = \frac{2019}{-\sqrt{17}+m}$ là hằng số xác định với điều kiện $m \neq \sqrt{17}$.

Suy ra với $m \neq \sqrt{17}$ thì đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận ngang $y = \pm\frac{2019}{\sqrt{17}-m}$.

Do đó theo yêu cầu bài toán thì đồ thị hàm số phải có 2 đường tiệm cận đứng.

Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình $\sqrt{17x^2-1} - m|x| = 0$.Do đó để đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng thì phương trình $\sqrt{17x^2-1} - m|x| = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Ta có $\sqrt{17x^2-1} - m|x| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{17x^2-1} = m|x| \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ 17x^2 - 1 = m^2x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ x^2(17-m^2) = 1 \end{cases}$

Phương trình $\sqrt{17x^2-1}-m|x|=0$ có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases}17-m^2>0\\ m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\le m<\sqrt{17}$$

Vậy $S=\{0;1;2;3;4\}$.

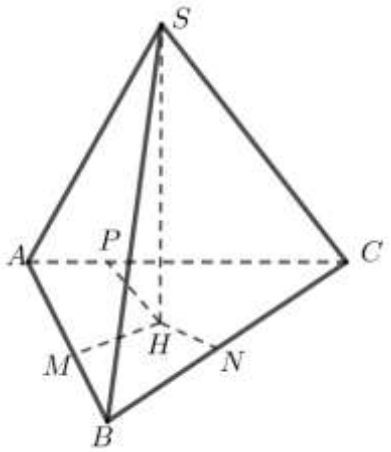
Câu 33. **[2H1-3.6-3]** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng $\sqrt{6}$. Biết rằng các mặt bên của hình chóp có diện tích bằng nhau và một trong các cạnh bên bằng $3\sqrt{2}$. Tính thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.ABC$.

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC), M,N,P lần lượt là hình chiếu của H trên AB, BC, CA. Khi đó SM, SN, SP lần lượt là các đường cao của các mặt bên.



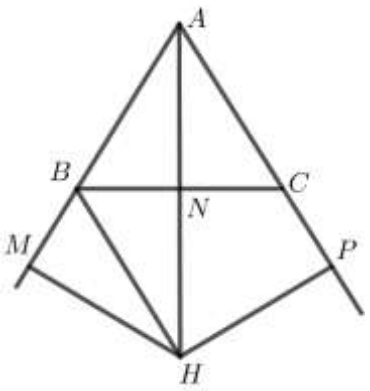
Vì các mặt bên của hình chóp có diện tích bằng nhau nên $SM=SN=SP$. Do đó $HM=HN=HP$. Như vậy H là tâm đường tròn nội tiếp hoặc bàng tiếp tam giác ABC.

+ TH1: H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Khi đó hình chóp $S.ABC$ là hình chóp đều có cạnh đáy bằng $\sqrt{6}$, cạnh bên bằng $3\sqrt{2}$.

Ta có: $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(\frac{2}{3}.\frac{\sqrt{6}.\sqrt{3}}{2}\right)^2}=4$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V=\frac{1}{3}.SH.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.4.\frac{\left(\sqrt{6}\right)^2.\sqrt{3}}{4}=2\sqrt{3}$.

+ TH2: H là tâm đường tròn bàng tiếp tam giác ABC. Do tam giác ABC đều nên không mất tính tổng quát giả sử H là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của ΔABC. Ta có $AH = 2.\frac{\sqrt{6}.\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{2}, BH = CH = \sqrt{6}$.



Nếu $SA = 3\sqrt{2}$ thì $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = 0$ (vô lí).

Nếu $SA \neq 3\sqrt{2}$ thì $SB = SC = 3\sqrt{2}$. Ta có: $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = 2\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{1}{3}.SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.2\sqrt{3}.\frac{\left(\sqrt{6}\right)^2.\sqrt{3}}{4} = 3$.

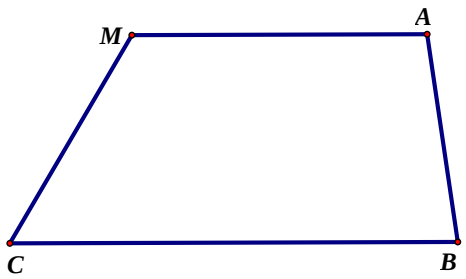
+ Vậy thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.ABC$ là $V = 3$.

Câu 34. **[2H3-3.3-3]** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;0)$, $B(3;4;-3)$, $C(1;-2;-1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + 3z - 2 = 0$. Số điểm M nằm trên mặt phẳng (P) sao cho tứ giác $MABC$ là hình thang đáy BC là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\overrightarrow{BC} = (-2;-6;2)$.

Gọi d là đường thẳng qua A và song song với BC .

Suy ra d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;3;-1)$. Phương trình tham số của

$d:\begin{cases} x=1+t \\ y=-2+3t\,;\ t\in\mathbb{R} \\ z=-t \end{cases}$.

Vì $MABC$ là hình thang đáy BC nên $MA//BC \Rightarrow M\in d$.

Mặt khác $M\in(P)$ do đó $M=d\cap(P)$.

Tọa độ M thỏa mãn: $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2+3t \\ z=-t \\ 2x+y+3z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=-1 \\ t=1 \end{cases} \Rightarrow M(2;1;-1)$.

Khi đó $\overrightarrow{AM}=(1;3;-1)$. Suy ra hai vectơ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BC}$ ngược hướng nên tứ giác $MABC$ không phải là hình thang đáy BC.

Vậy không có điểm M thỏa mãn bài toán.

Câu 35. **[2D2-4.7-2]** Với mọi giá trị của $a>0, a\neq 1$, đồ thị hàm số $y=a^{x-2}$ luôn đi qua điểm cố định A và đồ thị hàm số $y=\log_a(4-x)$ luôn đi qua điểm cố định B. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. 1. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 2 .

Lời giải

Chọn B

Dễ thấy đồ thị hàm số $y=a^{x-2}$ luôn đi qua điểm cố định $A(2;1)$.

Đồ thị hàm số $y=\log_a(4-x)$ luôn đi qua điểm cố định $B(3;0)$.

Khoảng cách giữa hai điểm AB là: $AB=\sqrt{(3-2)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$.

Câu 36. **[2D3-2.3-3]** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ và thỏa mãn $f(2)=0$, $\int_1^2 (f'(x))^2\,dx=\frac{5}{12}+\ln\frac{2}{3}$ và $\int_1^2 \frac{f(x)}{(x+1)^2}dx=-\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}$. Tính tích phân $\int_1^2 f(x)dx$.

A. $\frac{3}{4}+2\ln\frac{3}{2}$. **B.** $\ln\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{4}-2\ln\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}+2\ln\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Xét $I=\int_1^2\frac{f(x)}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=\frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\end{cases}$.

$\Rightarrow I=\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\right)f(x)\Big|_1^2-\int_1^2\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\int_1^2\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}$ (1)

Ta có: $\int_1^2(f'(x))^2\mathrm{d}x=\frac{5}{12}-\ln\frac{3}{2}$, $\int_1^2 2\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x=2\left(-\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}\right)$,

$\int_1^2\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{5}{12}-\ln\frac{3}{2}$.

$\Rightarrow\int_1^2\left(f'(x)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right)\right)^2\mathrm{d}x=0\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\Rightarrow\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow f(x)=-\ln(x+1)+\frac{1}{2}x+C\ (\forall x\in[1;2])$, vì $f(2)=0$ nên $C=\ln 3-1$.

Ta có: $f(x)=-\ln(x+1)+\frac{1}{2}x+\ln 3-1,\ \forall x\in[1;2]$.

Vậy: $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2\left(-\ln(x+1)+\frac{1}{2}x+\ln 3-1\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{4}+2\ln\frac{2}{3}$.

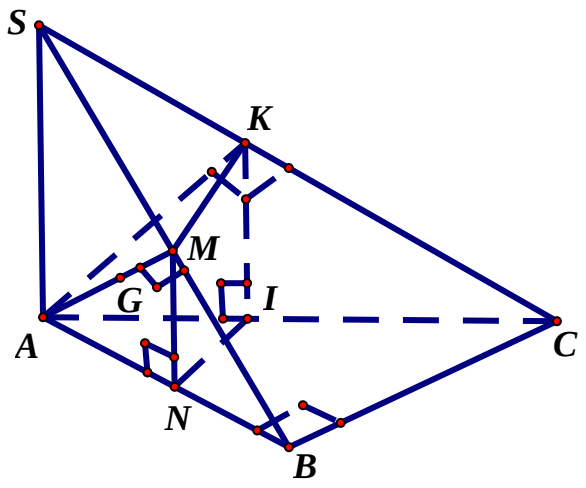
Câu 37. **[1H3-4.3-3]** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AC=a\sqrt{2}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SAB và K là hình chiếu vuông góc của đỉnh A trên cạnh SC. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AGK). Tính $\cos\alpha$, biết rằng khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (KBC) bằng $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

A. $\cos\alpha=\frac{1}{2}$. **B.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Theo công thức hình chiếu



Gọi M là hình chiếu vuông góc của A trên SB, ta dễ chứng minh được $AM \perp (SBC)$ hay $AM \perp (KBC)$, kết hợp giả thiết suy ra $d(A,(KBC)) = AM = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Do tam giác SAB vuông tại A có AM là đường cao nên $\frac{1}{AM^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow SA = a$.

Do đó tam giác SAB vuông cân tại A nên M là trung điểm của SB suy ra $G \in AM$.

Gọi N, I lần lượt là hình chiếu của M, K trên mặt phẳng (ABC), khi đó góc α giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AGK) cũng chính là góc giữa hai mặt phẳng (ANI) và (AMK).

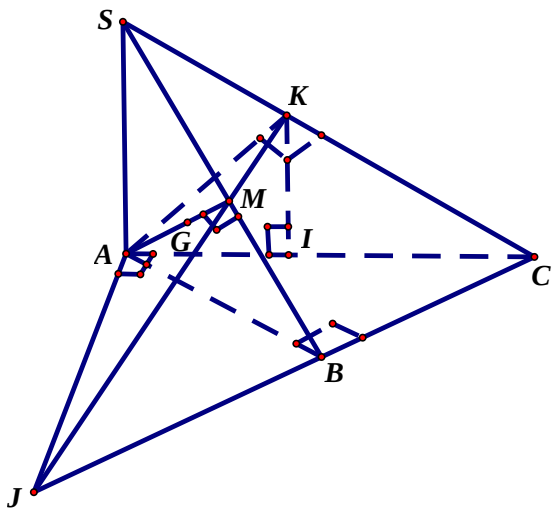
Ta có $\cos\alpha = \frac{S_{ANI}}{S_{AMK}}$.Tam giác SAC có AK là đường cao nên tính được $AK = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$.

Tam giác AKC vuông tại $K \Rightarrow AK^2 = AI.AC \Rightarrow AI = \frac{\sqrt{2}}{3}a$, $AN = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$, $S_{AIN} = \frac{1}{2}AI.AN.\sin 45° = \frac{1}{12}a^2$.

Tam giác AMK vuông tại M có $AM = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, $MK = \sqrt{AK^2 - AM^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}a$

$$\Rightarrow S_{AMK}=\frac{1}{2}AM.MK=\frac{\sqrt{3}}{12}a^2,\ \cos\alpha=\frac{S_{ANI}}{S_{AMK}}=\frac{\frac{1}{12}a^2}{\frac{\sqrt{3}}{12}a^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Cách 2: Tính theo định lý cách xác định góc giữa hai mặt phẳng



Các điểm M,K xác định như cách 1, kéo dài MK cắt BC tại J.

Ta dễ chứng minh được

$$\begin{cases}(AGK)\cap(ABC)=JA\\ JA\perp(SAC)\\ (SAC)\cap(AGK)=AK\\ (SAC)\cap(ABC)=AI\end{cases}\Rightarrow((AGK),(ABC))=(AK,AI)=KAI=\alpha,\ \cos\alpha=\frac{AI}{AK}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Cách 3 : Theo định nghĩa góc giữa hai mặt phẳng

Ta dễ chứng minh được $SA\perp(ABC)$, $SC\perp(AGK)$ suy ra góc α giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AGK) cũng chính là góc giữa hai đường thẳng SA và SC.

Suy ra $\cos\alpha=\cos ASC=\frac{SA}{SC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 38. **[1D2-5.2-4]** Cho tập $X=\{1;2;...;8\}$. Gọi A là tập các số tự nhiên có 8 chữ số đôi một khác nhau được lập từ X. Lấy ngẫu nhiên một số từ tập A. Tính xác suất để số được lấy chia hết cho 2222.

A. $\frac{C_8^2C_6^2C_4^2}{8!}$. **B.** $\frac{192}{8!}$. **C.** $\frac{4!4!}{8!}$. **D.** $\frac{348}{8!}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $n(\Omega)=8!$.Gọi số được lấy từ A có dạng $a=\overline{a_1a_2...a_8}$.

Vì $2222=2.1111$, hơn nữa 2 và 1111 là 2 số nguyên tố cùng nhau nên $a\vdots 2222 \Leftrightarrow \begin{cases} a\vdots 2 \\ a\vdots 1111 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_8\vdots 2 \\ a\vdots 1111 \end{cases}$.

Từ $a_1+a_2+...+a_8=1+2+..+8=36\vdots 9$ nên $a\vdots 9999$.

Lại có $a=\overline{a_1a_2...a_8}=10000.\overline{a_1a_2a_3a_4}+\overline{a_5a_6a_7a_8}=9999.\overline{a_1a_2a_3a_4}+\left(\overline{a_1a_2a_3a_4}+\overline{a_5a_6a_7a_8}\right)$ suy ra $\left(\overline{a_1a_2a_3a_4}+\overline{a_5a_6a_7a_8}\right)\vdots 9999$.

Nhưng vì $2000<\overline{a_1a_2a_3a_4}+\overline{a_5a_6a_7a_8}<18000$ nên $\overline{a_1a_2a_3a_4}+\overline{a_5a_6a_7a_8}=9999$ hay $a_1+a_5=a_2+a_6=a_3+a_7=a_4+a_8=9$.

Dễ thấy mỗi số tự nhiên a thỏa mãn điều kiện trên và a_8 là số chẵn đều chia hết cho 2222.

Chia 8 số từ X thành bốn bộ có tổng bằng 9 là $(1;8),(2;7),(3;6),(4;5)$.

a_8 có 4 cách chọn.

Mỗi cách chọn a_8 ta có duy nhất một cách chọn a_4.

Ba bộ còn lại $(a_1;a_5),(a_2;a_6),(a_3;a_7)$ có thể hoán vị cho nhau, đồng thời hai phần tử trong mỗi bộ có cũng có thể hoán vị cho nhau nên có tất cả $3!.(2!)^3$ cách chọn.

Tóm lại, ta có $n(A)=4.3!.(2!)^3=192$.

Vậy $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{192}{8!}$.

Câu 39. **[2D1-1.4-4]** Cho phương trình $x^2+7+m\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x^4+x^2+1}+m\left(\sqrt{x^2-x+1}-2\right)$. Biết tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có nghiệm là $(-a;b)$. Tính $P=b+a$

A. $-\dfrac{26}{3}$. **B.** $\dfrac{13}{6}$. **C.** $\dfrac{13}{3}$. **D.** $\dfrac{13}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$x^2+7+m\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x^4+x^2+1}+m\left(\sqrt{x^2-x+1}-2\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2+7-\sqrt{x^4+x^2+1}=m\left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}-2\right)$$

Đặt $t=\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\Rightarrow t^2=2x^2-2\sqrt{x^4+x^2+1}+2$

Xét hàm số $t=\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có

$$t'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}-\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$t'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}-\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}=0\Leftrightarrow(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}=(2x+1)\sqrt{x^2-x+1}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(2x-1).(2x+1)\ge 0\\(2x-1)^2\left(x^2+x+1\right)=(2x+1)^2.\left(x^2-x+1\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge\frac{1}{2}\\x\le-\frac{1}{2}\text{ (Vô nghiệm)}\end{array}\right.\\x=0\end{cases}$$

Mặt khác $t'(0)<0\Rightarrow t'(x)=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}-\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}<0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$+\infty$
$t'(x)$		$-$	
$t(x)$	1	$\searrow$	-1

$\Rightarrow t\in(-1;1)$. Ta có phương trình: $t^2+12=2m(t-2)\Leftrightarrow\dfrac{t^2+12}{t-2}=2m$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+12}{t-2}$, $t\in(-1;1)$, $f'(t)=\dfrac{t^2-4t-12}{(t-2)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\ (l)\\t=6\ (l)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

t	-1		1
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	$-\frac{13}{3}$	$\searrow$	-13

Phương trình $\frac{t^2+12}{t-2}=2m$ có nghiệm $t\in(-1;1)\Leftrightarrow -13<2m<-\frac{13}{3}\Leftrightarrow -\frac{13}{2}<m<-\frac{13}{6}$

$\Rightarrow a=\frac{13}{2}, b=-\frac{13}{6}\Rightarrow b+a=\frac{13}{3}$.

Câu 40. **[2H1-3.3-2]** Một khối lập phương có thể tích gấp 24 lần thể tích của một khối tứ diện đều. Hỏi cạnh khối lập phương gấp bao nhiêu lần cạnh của tứ diện đều.

A. 2 **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Tác giả: Vũ Thị Hồng Lê; Fb: Lê Hồng

Chọn D

Gọi cạnh của khối lập phương là a, cạnh của tứ diện đều là b.

Thể tích của khối lập phương là: $V_1=a^3$.

Thể tích của khối tứ diện đều là: $V_2=\frac{b^3\sqrt{2}}{12}$.

Theo giả thiết khối lập phương có thể tích gấp 24 lần thể tích của khối tứ diện đều nên ta có:

$V_1=24.V_2\Leftrightarrow a^3=24.\frac{b^3\sqrt{2}}{12}\Leftrightarrow a^3=2\sqrt{2}.b^3\Leftrightarrow a=\sqrt{2}.b$

Vậy cạnh khối lập phương gấp $\sqrt{2}$ cạnh của tứ diện đều.

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

NAM ĐỊNH

NĂM HỌC 2018 – 2019

Môn: Toán TL (Bài độc lập). Lớp: 12

Thời gian làm bài: 75 phút

Câu 1. Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+2}$ có đồ thị (C) và điểm $O(0;0)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y=2x+3m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B thỏa mãn trọng tâm G của tam giác OAB thuộc đường thẳng $\Delta: 2x-y+m^3=0$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x+3}{x+2}=2x+3m$ (với x là ẩn số) (1).

Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq-2\\2x^2+3(m+1)x+6m-3=0\end{cases}.$$

Khi đó $2x^2+3(m+1)x+6m-3=0$ có hai nghiệm phân biệt khác -2 khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\Delta=9(m+1)^2-8(6m-3)>0\\8-6(m+1)+6m-3\neq0\end{cases}\Leftrightarrow 9m^2-30m+33>0 \text{ luôn đúng với mọi } m\in\mathbb{R}.$$

Ta có $O\notin d\Leftrightarrow m\neq0$.

Gọi x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình (1).

Theo Định lí Vi-ét ta có $x_1+x_2=-\dfrac{3(m+1)}{2}$.

Giả sử $A(x_1;2x_1+3m)$, $B(x_2;2x_2+3m)$.

Khi đó $G\left(\frac{x_1+x_2}{3};\frac{2(x_1+x_2)+6m}{3}\right)$ hay $G\left(-\frac{m+1}{2};m-1\right)$.

Ta có $G\in\Delta \Leftrightarrow m^3-2m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện $m\neq 0$ ta được tất cả các giá trị cần tìm của m là $-\sqrt{2};\sqrt{2}$.

Câu 2. 1) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số thỏa mãn không có số nào lặp lại đúng 3 lần.

2) Giải phương trình $2^{\log_{5-x}3}=x$.

Lời giải

Tác giả: Trần Công Dũng; Fb: Dung Tran

1) Số các số tự nhiên có 4 chữ số là: $9.10^3=9000$ số.

Số các số tự nhiên có 4 chữ số mà số 0 lặp lại 3 lần là: 9 số.

Số các số tự nhiên có 4 chữ số mà số 1 lặp lại đúng 3 lần có: $8+9.3=35$ số.

Tương tự cho trường hợp số các số tự nhiên có 4 chữ số mà số $2,3,...,9$ lặp lại đúng 3 lần cũng là 35 số.

Vậy số các số thỏa yêu cầu bài toán là: $9000-(9+35.9)=8676$ số.

2) Điều kiện: $\begin{cases} x<5 \\ x\neq 4 \end{cases}$.

Đặt $t=\log_{5-x}3$. Khi đó $2^t=x$ (1).

Nhận thấy $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình trên nên $t\neq 0$.

Vậy $\log_{5-x}3=t \Leftrightarrow \log_3(5-x)=\frac{1}{t} \Leftrightarrow 5-x=3^{\frac{1}{t}}$ (2).

Từ (1) và (2) ta được $3^{\frac{1}{t}}+2^t-5=0$ (3).

- Với $t<0$ thì $3^{\frac{1}{t}}<1$ và $2^t<1$ và $3^{\frac{1}{t}}+2^t-5<-3<0$.
- Với $t>0$. Xét hàm số $f(t)=3^{\frac{1}{t}}+2^t-5$.

$$\Rightarrow f'(t)=-\frac{3^{\frac{1}{t}}\ln 3}{t^2}+2^t\ln 2.$$

$\Rightarrow f''(t)=\dfrac{3^{\frac{1}{t}}\ln^2 3}{t^4}+\dfrac{2.3^{\frac{1}{t}}\ln 3}{t^3}+2^t\ln^2 2>0$ với mọi $t>0$.

$\Rightarrow f'(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Mà $f'(1)<0$ và $f'(2)>0$.

Vậy phương trình $f'(t)=0$ có đúng một nghiệm trên khoảng $(0;+\infty)$.

Suy ra phương trình $f(t)=0$ có nhiều nhất hai nghiệm trên khoảng $(0;+\infty)$.

Nhận thấy $f(1)=0$ và $f(\log_2 3)=0$ nên phương trình (3) có đúng hai nghiệm trên $(0;+\infty)$.

- Với $t=1$ thì $x=2$.
- Với $t=\log_2 3$ thì $x=3$.

Vậy $S=\{2;3\}$.

Câu 3. **[2Đ2-5.5-4]** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=2+\dfrac{y^2}{x} \\ \ln(2x-3)+\sqrt{8x^2-20x+12}=\ln y+2y \end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện hệ phương trình $\begin{cases} 2x-3>0 \\ 8x^2-20x+12\ge 0 \\ x\ne 0 \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{3}{2} \\ y>0 \end{cases}$.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=2+\dfrac{y^2}{x} & (1) \\ \ln(2x-3)+\sqrt{8x^2-20x+12}=\ln y+2y & (2) \end{cases}$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow (x-1)^2=y^2 \Leftrightarrow (x-y-1)(x+y-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y-1=0 \\ x+y-1=0 \end{array}\right.$.

Vì $x>\dfrac{3}{2}, y>0$ nên $x+y-1>\dfrac{1}{2}$. Do đó trường hợp $x+y-1=0$ không thỏa mãn.

Với $x-y-1=0 \Leftrightarrow y=x-1$ thì phương trình (2) trở thành

$$\ln(2x-3)+\sqrt{8x^2-20x+12}=\ln(x-1)+2(x-1).$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(2x-3)+\sqrt{2x^2-5x+3}=\frac{1}{2}\ln(x-1)+(x-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(2x-3)+\frac{1}{2}\ln(x-1)+\sqrt{(2x-3)(x-1)}=\ln(x-1)+(x-1)$$

$$\Leftrightarrow \ln\sqrt{(2x-3)(x-1)}+\sqrt{(2x-3)(x-1)}=\ln(x-1)+(x-1) \qquad (3).$$

• Xét hàm số $f(t)=\ln t+t$ với $t>\frac{1}{2}$.

Ta có $f'(t)=\frac{1}{t}+1>0,\forall t>\frac{1}{2}$ nên hàm số $f(t)=\ln t+t$ đồng biến trên $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Nên $(3)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{(x-1)(2x-3)}\right)=f(x-1)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x-3)(x-1)}=x-1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-5x+3=(x-1)^2\\ x>\frac{3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-3x+2=0\\ x>\frac{3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\end{array}\right.\\ x>\frac{3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

• Với $x=2$ thì $y=x-1=1$ (thỏa mãn).

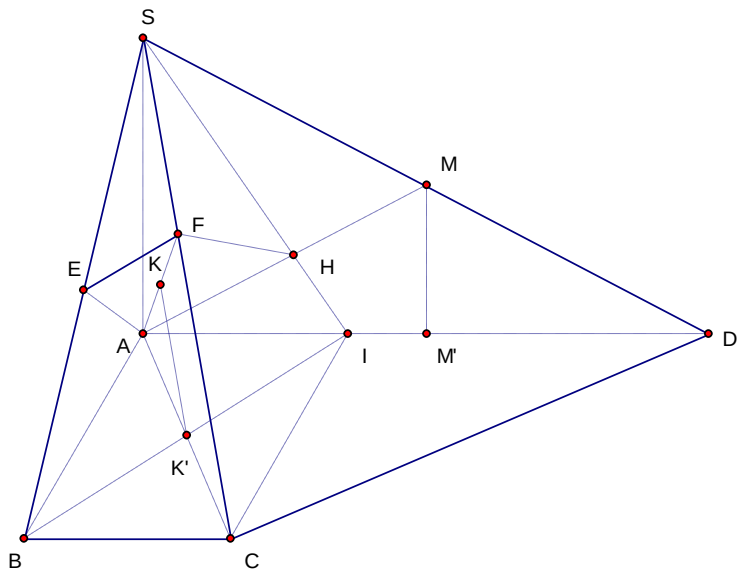
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $x=2;y=1$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AD=3BC=3a$, $AB=a$, $SA=a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm SD và I thỏa mãn $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AI}$.

a. Tính thể tích của khối tứ diện $CDMI$. Tính góc giữa hai đường thẳng AM và SC.

b. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A trên các cạnh SB, SC. Gọi H là giao điểm của SI và AM. Tính thể tích của khối nón có đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác EFH và đỉnh thuộc mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải



a. Gọi M' là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Trong tam giác SAD, có $\begin{cases} SA//MM' \\ MS = MD \end{cases} \Rightarrow MM' = \frac{1}{2}SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong hình thang $ABCD$, có $\begin{cases} AD // \text{CD} \\ AI = BC = AB \\ A = 90^o \end{cases}$. Suy ra $ABCI$ là hình vuông.

Diện tích của tam giác CDI là $S_{CDI} = \frac{1}{2}CI.DI = a^2$.

Vậy thể tích của khối tứ diện $CDMI$ là $V = \frac{1}{3}S_{CDI}.MM' = \frac{1}{3}a^2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Ta có: $\begin{cases} CI \perp AD \\ CI \perp SA \end{cases} \Rightarrow CI \perp (SAD) \Rightarrow CI \perp AM \ (1)$.

Trong tam giác vuông SAD, có:

$SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = 2\sqrt{3}a \Rightarrow SM = AM = SA = a\sqrt{3} \Rightarrow SAM = 60^o$.

$\tan ASI = \frac{AI}{SA} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow ASI = 30^o$.

Suy ra $SHA = 90^0$ (H là giao điểm của SI và AM). Do đó $SI \perp AM \ (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $AM \perp (SIC) \Rightarrow AM \perp SC$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng AM và SC bằng 90°.

b. Ta có $\begin{cases} AE \perp SB \\ AE \perp BC \end{cases} \Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow \begin{cases} AE \perp SC \\ AE \perp EF \end{cases}$ (3).

$SM \perp (SIC) \Rightarrow AH \perp (SIC) \Rightarrow \begin{cases} AH \perp SC \\ AH \perp HF \end{cases}$ (4).

$AF \perp SC$ (6).

Từ $(3),(4),(5)$ suy ra bốn điểm A, E, F, H đồng phẳng; mặt phẳng $SC \perp (AEFH)$ và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EFH là trung điểm K của đoạn AF.

Gọi K' là trung điểm của đoạn AC.

Vì $KK' // FC$ và $SC // (AEFH)$ nên $KK' \perp (EFH)$ hay K' là đỉnh của hình nón đang cần xét.

Trong tam giác SAC, có:

$$\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AF = \frac{AS.AC}{\sqrt{AS^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{30}}{5} \Rightarrow KF = \frac{a\sqrt{30}}{10}$$

và

$$FC = \frac{AC^2}{SC} = \frac{2a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow KK' = \frac{1}{2}FC = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy thể tích V' của khối nón có đáy là đường trong ngoại tiếp tam giác EFH và đỉnh thuộc mặt phẳng $(ABCD)$ là

$$V' = \frac{1}{3}\pi.KF^2.KK' = \frac{1}{3}.\pi.\frac{a^2 30}{100}.\frac{a\sqrt{5}}{5} = \frac{\pi a^3\sqrt{5}}{50}.$$

Câu 5. Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn $5(x^3 + y^3 + z^3) = (x + y + z)(xy + yz + zx) + 15xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{2(x + y + z)} - (y^2 + z^2)$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Minh; Fb:Minh Văn Nguyễn

Khi x, y, z dương thì

$$5(x^3 + y^3 + z^3) = (x + y + z)(xy + yz + zx) + 15xyz$$

$$\Leftrightarrow 5(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) = (x + y + z)(xy + yz + zx)$$

$\Leftrightarrow 5(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=(x+y+z)(xy+yz+zx)$

$\Leftrightarrow 5(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=xy+yz+zx$

$\Leftrightarrow 5(x^2+y^2+z^2)=6(xy+yz+zx)$

$\Leftrightarrow 5x^2-6x(y+z)=6yz-5(y^2+z^2)$.

Vì $6yz-5(y^2+z^2)=-4(y-z)^2-(y+z)^2\le-(y+z)^2$

nên $5x^2-6xA\le-A^2\Leftrightarrow 5x^2-6xA+A^2\le 0$ (với $A=y+z>0$)

$\Leftrightarrow \frac{A}{5}\le x\le A$ hay $\frac{1}{5}(y+z)\le x\le y+z$.

Do đó $P=\sqrt{2(x+y+z)}-(y^2+z^2)\le 2\sqrt{y+z}-\frac{(y+z)^2}{2}$.

Đặt $t=\sqrt{y+z}$, $t>0$ khi đó $P\le 2t-\frac{1}{2}t^4$.

Xét hàm số $f(t)=2t-\frac{1}{2}t^4$ với $t>0$.

Ta có $f'(t)=2-2t^3=0\Leftrightarrow t=1$.

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	

Suy ra $maxP=\frac{3}{2}$ khi $t=1\Leftrightarrow y+z=1\Rightarrow\begin{cases}x=y+z=1\\ y=z=\frac{1}{2}\end{cases}$.

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 12 NĂM HỌC 2018-2019
SỞ BÌNH THUẬN

Bài 1 (*6,0 điểm*).

a) Cho x và y là các số thực thỏa mãn $2x \ge y > 0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}$.

b) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 3mx + m$ có hai điểm cực trị nằm khác phía đối với trục hoành.

Bài 2 (*5,0 điểm*).

a) Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) biết $u_1 = 2$ và $u_{n+1} = 2u_n + 5, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Cho dãy số (v_n) thỏa mãn $v_1 = \dfrac{1}{2018}, v_{n+1} = \dfrac{2v_n}{1 + 2018v_n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh rằng $v_{n+1} \ge v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 3 (*4,0 điểm*). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2\sqrt{xy}(x + y - 1) = x^2 + y^2 \\ x^2 y\sqrt{y^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1} = x^2 y - x \end{cases}.$$

Bài 4 (*5,0 điểm*). Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$ và hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Các đường tròn $(O_1), (O_2)$ cùng đi qua A và theo thứ tự tiếp xúc với BC tại B, C. Gọi D là giao điểm thứ hai của (O_1) và (O_2).

a) Chứng minh đường thẳng AD đi qua trung điểm của cạnh BC;

b) Chứng minh ba đường thẳng EF, BC, HD đồng quy.

---------- HẾT ----------

Học sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.

Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm.

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1a. Cho x và y là các số thực thỏa mãn $2x \ge y > 0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}$.

Lời giải

Tác giả: Bùi Văn Lượng; Fb: luonghaihaubui

Ta có $P = \dfrac{t^2 - t + 1}{t^2 + t + 1}$, với $t = \dfrac{x}{y} \ge \dfrac{1}{2}$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2 - t + 1}{t^2 + t + 1}$ với $t \ge \dfrac{1}{2}$.

Tính được $f'(t) = \dfrac{2t^2 - 2}{(t^2 + t + 1)^2}$, $\begin{cases} f'(t) = 0 \\ t \ge \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$.

Bảng biến thiên

t	$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{3}{7}$	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{1}{3}$, không có giá trị lớn nhất.

Câu 1b. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 3mx + m$ có hai điểm cực trị nằm khác phía đối với trục hoành.

Lời giải

Tác giả: Phùng Đức Cường; Fb: Phùng Đức Cường

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm của hàm số là $y' = 3x^2 - 6x - 3m$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $y(x_1).y(x_2) < 0$.

Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 1 + m > 0 \Leftrightarrow m > -1$ (*).

Khi đó đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị là $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$.

Ta có $y=\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\right).y'-2(m+1)x$.

Do đó $y_1=y(x_1)=-2(m+1)x_1$, $y_2=y(x_2)=-2(m+1)x_2$.

$y(x_1).y(x_2)<0 \Leftrightarrow 4(m+1)^2 x_1.x_2<0$

$\Leftrightarrow x_1.x_2<0 \Leftrightarrow -m<0 \Leftrightarrow m>0$.

Kết hợp với điều kiện (*) ta có $m>0$ thỏa mãn bài toán.

Câu 2a. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) biết $u_1=2$ và $u_{n+1}=2u_n+5, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Lời giải

Tác giả: Phạm Thị Thanh Thủy ; Fb: Phạm Thủy

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, ta có $u_{n+1}=2u_n+5 \Leftrightarrow u_{n+1}+5=2(u_n+5)$.

Đặt $w_n=u_n+5, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Khi đó $w_{n+1}=2w_n, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Do đó (w_n) là cấp số nhân có $w_1=u_1+5=7$, công bội $q=2$.

Suy ra $w_n=w_1.q^{n-1}=7.2^{n-1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Vậy $u_n=7.2^{n-1}-5, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Câu 2b. Cho dãy số (v_n) thỏa mãn $v_1=\frac{1}{2018}, v_{n+1}=\frac{2v_n}{1+2018v_n^2}, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng $v_{n+1}\ge v_n, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Lời giải

Tác giả: Vũ Thị Hồng Lê; Fb: Lê Hồng

Chứng minh được $v_n>0, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Khi đó $v_{n+1}=\frac{2v_n}{1+2108v_n^2}\le\frac{2v_n}{2\sqrt{2018}.v_n}=\frac{1}{\sqrt{2018}}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Mặt khác, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, ta có

$$v_{n+1}-v_n=\frac{2v_n}{1+2018v_n^2}-v_n=\frac{v_n-2018v_n^3}{1+2018v_n^2}=\frac{v_n\left(1-2018v_n^2\right)}{1+2018v_n^2}\ge 0$$

Vậy $v_{n+1}\ge v_n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Câu 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}2\sqrt{xy}\left(x+y-1\right)=x^2+y^2 & (1)\\ x^2y\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1}=x^2y-x & (2)\end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện $xy\ge 0$.

Ta có $\sqrt{x^2+1}-x>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên $y=0$ không thõa mãn (2). Do vậy $y\ne 0$. Suy ra $x=0$ không thõa mãn (1).

Nếu x,y cùng âm thì (1) vô lí. Do đó x,y cùng dương.

Khi đó $(2)\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=y\left(\sqrt{y^2+1}-1\right)\Leftrightarrow \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}=y\sqrt{y^2+1}-y\ \ (3)$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=t\sqrt{1+t^2}-t$ trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Ta có $f'\left(t\right)=\sqrt{t^2+1}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}-1>0,\ \forall t>0$. Suy ra hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

Khi đó $(3)\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=f\left(y\right)\Leftrightarrow \frac{1}{x}=y\Leftrightarrow xy=1$.

Thay $xy=1$ vào (1) ta được:

$2\left(x+y-1\right)=x^2+y^2\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2=0\Leftrightarrow x=y=1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$.

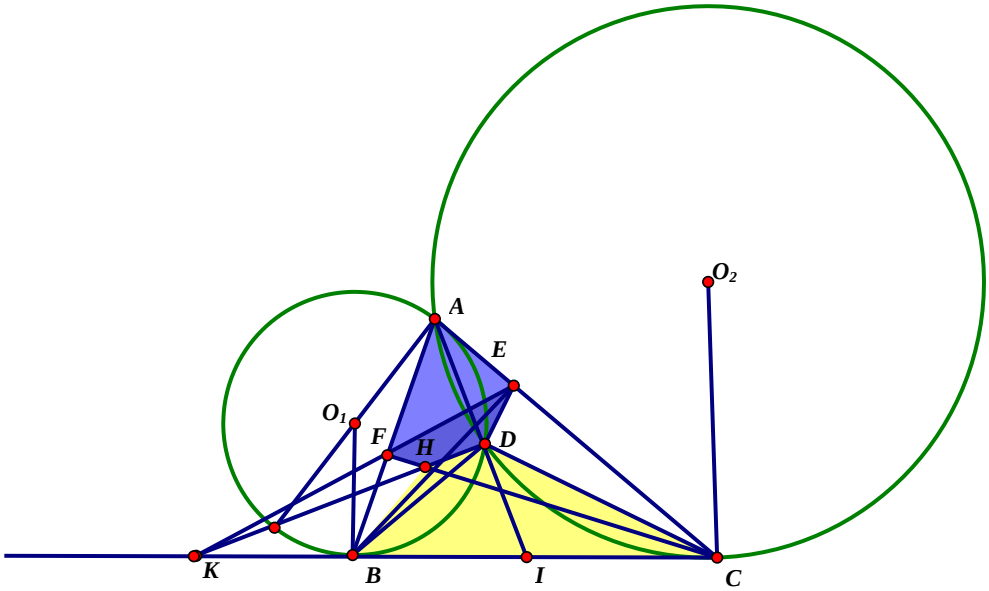
Câu 4. Cho tam giác ABC nhọn có $AB<AC$ và hai đường cao BE,CF cắt nhau tại H. Các đường tròn $\left(O_1\right),\left(O_2\right)$ cùng đi qua A và theo thứ tự tiếp xúc với BC tại B,C. Gọi D là giao điểm thứ hai của $\left(O_1\right)$ và $\left(O_2\right)$.

a) Chứng minh đường thẳng AD đi qua trung điểm của cạnh BC;

b) Chứng minh ba đường thẳng BC,EF,HD đồng quy.

Lời giải

Tác giả: Trần Công Dũng ; Fb: Dung Tran



a. Gọi I là giao điểm của AD và BC.

Ta có $IB^2 = IA.ID = IC^2$.

Suy ra $IB = IC$.

Do đó I là trung điểm của BC. Hay đường thẳng AD đi qua trung điểm I của BC.

b) Chứng minh ba đường thẳng EF, BC, HD đồng quy.

Ta có $BHC = BDC$. Suy ra tứ giác $BCDH$ nội tiếp đường tròn (O_3)

Ta có $AFH = ADH = AEH = 90^0$. Suy ra tứ giác $AFHD$ nội tiếp đường tròn (O_4)

Ta có $BFC = BEC = 90^0$. Suy ra tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn (O_5) đường kính BC

Ta có HD là dây cung chung của hai đường tròn $(O_3)\&(O_4)$.

HD là trục đẳng phương hai đường tròn $(O_3)\&(O_4)$

Tương tự ta được:

EF là trục đẳng phương hai đường tròn $(O_3)\&(O_5)$

BC là trục đẳng phương hai đường tròn $(O_5)\&(O_4)$

Suy ra ba đường thẳng BC, EF, HD đồng quy

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 12 NĂM HỌC 2018-2019
SỞ THÁI BÌNH

Câu 1.1. Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}\,(C)$ và đường thẳng d có phương trình: $y=2x+m$. Tìm m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\frac{5}{4}$ (với O là gốc tọa độ).

Lời giải

+ Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{2x+1}{x-1}=2x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ 2x+1=(x-1)(2x+m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ g(x)=2x^2+(m-4)x-(m+1)=0 \end{cases}$$

+ Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A,B

$\Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=(m-4)^2+8(m+1)>0 \\ g(1)=-3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=m^2+24>0\ \forall m\in\mathbb{R} \\ g(1)=-3\neq 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m^2+24>0\ (\forall m\in\mathbb{R})$

+ Gọi $A(x_1;2x_1+m);\ B(x_2;2x_2+m)$

Khi đó x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $g(x)=0$

Theo định lý Vi-et ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{m-4}{2} \\ x_1.x_2=-\frac{m+1}{2} \end{cases}$

+ Ta có $d:\ y=2x+m \Leftrightarrow 2x-y+m=0$

Mặt khác ta có: $d(O,d)=\frac{|m|}{\sqrt{5}}$

$$AB^2=5(x_1-x_2)^2=5\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]=5\left(\frac{m^2-8m+16}{4}+\frac{4m+4}{2}\right)=\frac{5(m^2+24)}{4}$$

+ Khi đó $S_{OAB}=\frac{1}{2}.d\left(O,d\right).AB=\frac{1}{2}.\frac{|m|}{\sqrt{5}}.\frac{\sqrt{5\left(m^2+24\right)}}{2}=\frac{|m|\sqrt{m^2+24}}{4}$

$S_{OAB}=\frac{5}{4}\Leftrightarrow |m|\sqrt{m^2+24}=5$

$\Leftrightarrow m^4+24m^2-25=0$

$\Leftrightarrow \left(m^2-1\right)\left(m^2+25\right)=0$

$\Leftrightarrow m=\pm 1$

Vậy $m=\pm 1$ là các giá trị cần tìm.

Câu 1.2. Cho hàm số $y=x^3+2\left(m+1\right)x^2+\left(8m-3\right)x+8m-6$. Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu trong đó có một điểm cực trị của đồ thị hàm số thuộc góc phần tư thứ hai, một điểm thuộc góc phần tư thứ tư của hệ trục tọa độ Oxy.

Lời giải

Cách 1: Ta có $y'=3x^2+4\left(m+1\right)x+8m-3$.

Hàm số trên có cực đại, cực tiểu khi $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$\Delta'>0\Leftrightarrow 4\left(m+1\right)^2-3\left(8m-3\right)>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>\frac{4+\sqrt{3}}{2} \\ m<\frac{4-\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.\ (1).$$

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình:

$$y=\frac{2}{9}\left(-4m^2+16m-13\right)x+\frac{2}{9}\left(-8m^2+31m-24\right)$$

Gọi $\left(x_1;y_1\right)$; $\left(x_2;y_2\right)$ là điểm cực trị của đồ thị hàm số. Ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=\frac{-4\left(m+1\right)}{3} \\ x_1.x_2=\frac{8m-3}{3}\end{cases}$

$$y_1=\frac{2}{9}\left(-4m^2+16m-13\right)x_1+\frac{2}{9}\left(-8m^2+31m-24\right)$$

$$y_2=\frac{2}{9}\left(-4m^2+16m-13\right)x_2+\frac{2}{9}\left(-8m^2+31m-24\right)$$

Hàm số $y=x^3+2(m+1)x^2+(8m-3)x+8m-6$ có hệ số $a=1>0$ nên không xãy ra trường hợp đồ thị hàm số có một điểm cực trị thuộc góc phần tư thứ nhất, một điểm thuộc góc phần tư thứ ba của hệ trục tọa độ Oxy.

Để một điểm cực trị của đồ thị hàm số thuộc góc phần tư thứ hai, một điểm cực trị của đồ thị hàm số thuộc góc phần tư thứ tư của hệ trục tọa độ Oxy thì $\begin{cases} x_1.x_2<0 \\ y_1.y_2<0 \end{cases}$.

Với $x_2.x_2<0 \Leftrightarrow m<\frac{3}{8}$ (2).

Với $y_1.y_2<0$

$\Leftrightarrow \left[(-4m^2+16m-13)x_1+(-8m^2+31m-24)\right]\left[(-4m^2+16m-13)x_2+(-8m^2+31m-24)\right]<0$

$\Leftrightarrow (-4m^2+16m-13)^2x_1x_2+(-8m^2+31m-24)(-8m^2+31m-24)(x_1+x_2)+(-8m^2+31m-24)^2<0$

$\Leftrightarrow -m^2+4m-3<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>3 \\ m<1 \end{array}\right.$ (3).

Từ (1) (2) (3) suy ra $m<\frac{3}{8}$ thì thỏa đề.

Cách 2: Yêu cầu bài toán tương đương với hàm số có hai điểm cực trị trái dấu và đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

+ Ta có $y'=3x^2+4(m+1)x+8m-3$, hàm số có hai điểm cực trị trái dấu $\Leftrightarrow 3.(8m-3)<0 \Leftrightarrow m<\frac{3}{8}$.

+ Đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow x^3+2(m+1)x^2+(8m-3)x+8m-6=0\,(1)$ có 3 nghiệm phân biệt.

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (x+2)(x^2+2mx+4m-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x^2+2mx+4m-3=0\,(2) \end{array}\right.$.

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác -2

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2-4m+3>0 \\ (-2)^2-4m+4m-3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>3 \\ m<1 \end{array}\right.$.

Vậy $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>3 \\ m<1 \end{array}\right. \\ m<\frac{3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow m<\frac{3}{8}$.

Câu 1.3. Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_{2018}(2-\cos 2x)}{x^2}$.

Lời giải

Ta có

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_{2018}(2-\cos 2x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\log_{2018}e^{\ln(2-\cos 2x)}}{x^2}$$

$$=2\log_{2018}e.\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln\left(1+2\sin^2 x\right)}{2\sin^2 x}.\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right]$$

$$=2\log_{2018}e$$

Câu 2.1. Giải phương trình: $\sin\left(\dfrac{5\pi}{4}-3x\right)-16=-15\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$

Lời giải

Tác giả:; Fb:

Đặt $t=\dfrac{\pi}{4}+x\Leftrightarrow x=t-\dfrac{\pi}{4}$. Phương trình đã cho trở thành:

$$\sin\left[\frac{5\pi}{4}-3\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right]+15\sin t-16=0$$

$$\Leftrightarrow -\sin 3t+15\sin t-16=0$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^3 t+12\sin t-16=0$$

$$\Leftrightarrow 4(\sin t-1)\left(\sin^2 t+\sin t+4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin t=1$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{2}+k2\pi.$$

Do đó ta có: $x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 2.2. Cho A là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc tập A. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 13 và có chữ số tận cùng bằng 2.

Lời giải

Cách 1.

Số phần tử của không gian mẫu là: $|\Omega| = 9.10^5$.

Gọi B là biến cố số được chọn chia hết cho 13 và có chữ số tận cùng bằng 2.

Ta nhận thấy rằng: Số nhỏ nhất có 6 chữ số chia hết cho 13 là: 100009, số lớn nhất có 6 chữ số chia hết cho 13 là: 999999.

Ta có $100009+13=100022$, do đó số có 6 chữ số nhỏ nhất chia hết cho 13 và có tận cùng bằng 2 chính là số 100022.

Nhận thấy rằng nếu hai số tự nhiên có 6 chữ số cùng chia hết cho 13 và đều có chữ số tận cùng bằng 2 thì hiệu của chúng cũng chia hết cho 13 và có chữ số tận cùng bằng 0.

Số nhỏ nhất (lớn hơn 0) có chữ số tận cùng bằng 0 chia hết cho 13 là 130.

Điều này chứng tỏ tất cả các số có 6 chữ số chia hết cho 13 và có chữ số tận cùng bằng 2 lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu là $u_1 = 100022$, công sai $d = 130$
.

Công thức số hạng tổng quát của dãy là: $u_n = u_1 + (n-1)d$.

Vì số cần tìm là số có 6 chữ số không vượt quá 999999 nên ta có:

$$100022 + (n-1)130 \le 999999 \Leftrightarrow n \le \frac{69230}{10} = 6923,9.$$

Vì n là số tự nhiên nên số hạng lớn nhất trong dãy trên ứng với $n = 6923$.

Vậy số phần tử của biến cố B là $|B| = 6923$.

Xác suất của biến cố B là: $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{6923}{900000}$.

Cách 2.

Số phần tử của không gian mẫu là: $|\Omega| = 9.10^5$.

Gọi số chia hết cho 13 và có chữ số tận cùng bằng 2 là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5 2}$.

Ta có $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5 2} = 10.\overline{a_1a_2a_3a_4a_5} + 2$.

Gọi k là số dư của phép chia $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ cho 13 $(k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le 12)$.

Khi đó vì $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5 2} = 10.\overline{a_1a_2a_3a_4a_5} + 2 \vdots 13\ (k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le 12)$ nên ta có:

$10k + 2 \vdots 13\ (k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le 12)$

Do đó tồn tại số tự nhiên t sao cho $10k + 2 = 13t \Leftrightarrow t = \dfrac{10k+2}{13} \in \mathbb{N}$, $(k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le 12)$.

Ta có bảng:

$k = 0$	$\dfrac{10k+2}{13} = \dfrac{2}{13} \notin \mathbb{N}$	Loại
$k = 1$	$\dfrac{10k+2}{13} = \dfrac{12}{13} \notin \mathbb{N}$	Loại
$k = 2$	$\dfrac{10k+2}{13} = \dfrac{22}{13} \notin \mathbb{N}$	Loại
$k = 3$	$\dfrac{10k+2}{13} = \dfrac{32}{13} \notin \mathbb{N}$	Loại
$k = 4$	$\dfrac{10k+2}{13} = \dfrac{42}{13} = 4 \in \mathbb{N}$	Thỏa mãn
$k = 5$	$\dfrac{10k+2}{13} = \dfrac{52}{13} \notin \mathbb{N}$	Loại
$k = 6$	$\dfrac{10k+2}{13} = \dfrac{62}{13} \notin \mathbb{N}$	Loại
$k = 7$	$\dfrac{10k+2}{13} = \dfrac{72}{13} \notin \mathbb{N}$	Loại
$k = 8$	$\dfrac{10k+2}{13} = \dfrac{82}{13} \notin \mathbb{N}$	Loại
$k = 9$	$\dfrac{10k+2}{13} = \dfrac{92}{13} \notin \mathbb{N}$	Loại
$k = 10$	$\dfrac{10k+2}{13} = \dfrac{102}{13} \notin \mathbb{N}$	Loại
$k = 11$	$\dfrac{10k+2}{13} = \dfrac{112}{13} \notin \mathbb{N}$	Loại
$k = 12$	$\dfrac{10k+2}{13} = \dfrac{122}{13} \notin \mathbb{N}$	Loại

Từ bảng trên ta có $k = 4$ là số dư của phép chia $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ cho 13. Như vậy, tồn tại số tự nhiên t để $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5} = 13t + 4$. Vì $10000 \le \overline{a_1a_2a_3a_4a_5} \le 99999$ nên $\dfrac{10000-4}{13} \le t \le \dfrac{99999-4}{13}$, hay $\dfrac{9996}{13} \approx 768,923 \le t \le \dfrac{99995}{13} \approx 7691,923$

$\Rightarrow 769 \le t \le 7691,\ t \in \mathbb{N}$.

Gọi B là biến cố số được chọn chia hết cho 13 và có chữ số tận cùng bằng 2.

Khi đó số phần tử của biến cố B là $|B| = 7691 - 769 + 1 = 6923$.

Xác suất của biến cố B là: $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{6923}{900000}$.

Câu 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^3(x+5)\sqrt{2+x} = 1+3y^2 \quad (1) \\ 2+\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2-6x+12} = y^2\left(3\sqrt{x^2-2x+4}+5\sqrt{x^2-6x+12}+8\right)(2) \end{cases}$$

Lời giải

ĐK: $x > -2$

Ta thấy với $y \le 0$ phương trình (1) vô nghiệm.

Với $y > 0$ ta có

$$(1) \Leftrightarrow y^3(x+5)\sqrt{2+x} = 1+3y^2 \Leftrightarrow (x+5)\sqrt{2+x} = \frac{1}{y^3}+\frac{3}{y}$$

$$\Leftrightarrow (x+2)\sqrt{2+x}+3\sqrt{2+x} = \frac{1}{y^3}+\frac{3}{y} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2+x}\right)^3+3\sqrt{2+x} = \left(\frac{1}{y}\right)^3+\frac{3}{y}$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{y} = \sqrt{2+x} \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{2+x}(3)$ (vì hàm số $f(t) = t^3+3t$ có

$f'(t) = 3t^2+3 > 0, \forall t \in (0;+\infty)$)

Thế (3) vào (2) ta có

$$2+\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2-6x+12} = \frac{1}{2+x}\left(3\sqrt{x^2-2x+4}+5\sqrt{x^2-6x+12}+8\right)$$

$$\Leftrightarrow (2+x)\left(2+\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2-6x+12}\right) = 3\sqrt{x^2-2x+4}+5\sqrt{x^2-6x+12}+8$$

$$\Leftrightarrow (2+x)\sqrt{x^2-2x+4}+(2+x)\sqrt{x^2-6x+12}-3\sqrt{x^2-2x+4}-5\sqrt{x^2-6x+12}+2x-4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\sqrt{x^2-2x+4}+(x-2)\sqrt{x^2-6x+12}+\sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{x^2-6x+12}+2(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\sqrt{x^2-2x+4}+(x-2)\sqrt{x^2-6x+12}+\frac{4x-8}{\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2-6x+12}}+2(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2-6x+12}+\frac{4}{\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2-6x+12}}+2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2-6x+12}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2-6x+12}}+2=0\left(PTVN\right) \end{array}\right.$$

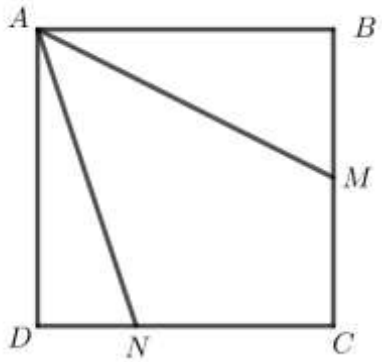
Với $x=2$ ta có $y=\dfrac{1}{2}$ (thỏa điều kiện đề bài).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(2;\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 4. **[0H3-1.6-3]** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$, $M\left(1;0\right)$ là trung điểm cạnh BC, N là điểm thuộc cạnh CD sao cho $CN=2ND$, đường thẳng AN có phương trình là $x-y+2=0$. Tìm tọa độ điểm A biết A có hoành độ dương.

Lời giải

Tác giả: Phạm Sơn; Fb: Phạm Sơn



+ Ta có: $\tan NAD=\dfrac{ND}{AD}=\dfrac{1}{3}$, $\tan MAB=\dfrac{MB}{AB}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \tan\left(NAD+MAB\right)=\dfrac{\tan NAD+\tan MAB}{1-\tan NAD.\tan MAB}=1\Rightarrow NAD+MAB=45^\circ\Rightarrow NAM=45^\circ$.

+ Đường thẳng AM qua $M\left(1;0\right)$ nên có dạng: $a\left(x-1\right)+by=0\ \left(a^2+b^2\neq 0\right)$.

$\cos\left(AM,AN\right)=\dfrac{\left|a-b\right|}{\sqrt{2}.\sqrt{a^2+b^2}}=\cos 45^\circ\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}=\left|a-b\right|\Leftrightarrow ab=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right.$.

Với $a=0$ thì AM: $y=0$. Mà $A=AM\cap AN$ nên $A\left(-2;0\right)$ (loại).

Với $b=0$ thì AM: $x-1=0$. Mà $A=AM\cap AN$ nên $A\left(1;3\right)$ (nhận).

+ Vậy $A\left(1;3\right)$.

Cách 2 <Nguyễn Viết Hòa>

+ Ta có: $\tan NAD = \dfrac{ND}{AD} = \dfrac{1}{3}$, $\tan MAB = \dfrac{MB}{AB} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \tan\left(NAD + MAB\right) = \dfrac{\tan NAD + \tan MAB}{1 - \tan NAD.\tan MAB} = 1 \Rightarrow NAD + MAB = 45^\circ \Rightarrow NAM = 45^\circ$.

$\mathrm{d}\left(M, AN\right) = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow MA = 3$. $A \in AN \Rightarrow A\left(x; x+2\right) \Rightarrow AM = \sqrt{\left(x-1\right)^2 + \left(x+2\right)^2}$.

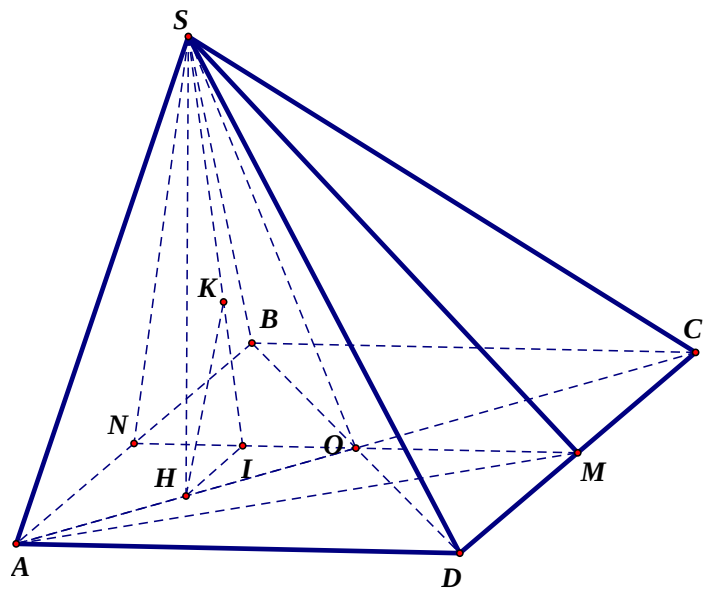
$MA = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right. \Rightarrow A\left(1;3\right)$ (vì $x_A > 0$).

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $a\sqrt{3}$, $SA = a$, $SB = SC = SD = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của cạnh CD.

1. Tính thể tích khối chóp $S.ABCM$.

2. Tính khoảng cách giữa SM và BC.

Lời giải



1. Gọi O là tâm của hình bình thoi $ABCD$.

Xét hai tam giác ΔABD và ΔSBD ta có: $AB = SB$, $AD = SD$, BD chung.

Suy ra $\Delta ABD = \Delta SBD \Rightarrow AO = SO$ (hai đường trung tuyến tương ứng).Tương tự $CO = SO$.

Tam giác SAC có đường trung tuyến SO và $AO = CO = SO$. Do đó ΔSAC vuông tại S.

Từ đó ta tính được $AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = 2a$, $OD = \sqrt{CD^2 - OC^2} = a\sqrt{2}$, $BD = 2a\sqrt{2}$.

Diện tích của tam giác BCD: $S_{\Delta BCD}=a^2\sqrt{2}$ (công thức Hê-rông).

Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔBCD là $r=\dfrac{BC.CD.BD}{4S_{\Delta BCD}}=\dfrac{3a}{2}$.

Gọi H là hình chiếu của S trên $(ABCD)$. Vì $SB=SC=SD$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD và $HB=r=\dfrac{3a}{2}\Rightarrow SH=\sqrt{SB^2-HB^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích tứ giác $ABCM$: $S=S_{ABCD}-S_{AMD}=\dfrac{3}{4}S_{ABCD}=\dfrac{3a^2\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích của khối chóp $S.ABCM$ là $V=\dfrac{1}{3}S.SH=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

2. Tính khoảng cách giữa SM và BC.

Gọi N là trung điểm của AB.

Dễ thấy $MN//BC\Rightarrow BC//(SMN)$ nên $d(BC,SM)=d(BC,(SMN))=d(C,(SMN))$

Mà $CO=2HO\Rightarrow d(C,(SMN))=2d(\mathrm{H},(SMN))$.

Kẻ $HI\perp MN\left(I\in MN\right)$, kẻ $HK\perp SI\left(K\in SI\right)$ ta có $HK=d\left(H,\left(SMN\right)\right)$.

Ta có: $d(D,BC)=d(A,BC)=\dfrac{2S_{BCD}}{BC}=\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}\Rightarrow HI=d(H,MN)=\dfrac{1}{4}d(A,BC)=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

$$HK=\frac{HI.\mathrm{HS}}{\sqrt{HI^2+HS^2}}=\frac{\dfrac{a\sqrt{6}}{6}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2+\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}=\frac{a\sqrt{66}}{22}\Rightarrow d(C,(SMN))=2HK=\frac{a\sqrt{66}}{11}.$$

Vậy $d(BC,SM)=\dfrac{a\sqrt{66}}{11}$.

Câu 6. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{9}{\sqrt{ab\left(a+c\right)\left(b+c\right)}}-\frac{32}{\sqrt{4+4a^2+4b^2+c^2}}\geq -5.$$

Lời giải

Tác giả:Nguyên Dung; Fb: Dung Nguyen

Cách 1.

Ta có: $\sqrt{ab(a+c)(b+c)}=\sqrt{(a^2+ac)(b^2+bc)}\overset{cosi}{\le}\dfrac{a^2+ac+b^2+bc}{2}$.

$\Rightarrow\sqrt{ab(a+c)(b+c)}\le\dfrac{a^2+b^2+c(a+b)}{2}$ (1).

Lại có: $c(a+b)\overset{cosi}{\le}\dfrac{c^2+(a+b)^2}{2}$ và $(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)\Rightarrow c(a+b)\overset{cosi}{\le}\dfrac{c^2+2(a^2+b^2)}{2}$ (2).

Từ (1), (2) $\Rightarrow\sqrt{ab(a+c)(b+c)}\le\dfrac{a^2+b^2+\dfrac{c^2+2(a^2+b^2)}{2}}{2}$.

$\Leftrightarrow\sqrt{ab(a+c)(b+c)}\le\dfrac{4a^2+4b^2+c^2}{4}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{ab(a+c)(b+c)}}\ge\dfrac{4}{4a^2+4b^2+c^2}$

$\Leftrightarrow\dfrac{9}{\sqrt{ab(a+c)(b+c)}}\ge\dfrac{36}{4a^2+4b^2+c^2}$.

Do đó:

$$P=\frac{9}{\sqrt{ab(a+c)(b+c)}}-\frac{32}{\sqrt{4+4a^2+4b^2+c^2}}\ge\frac{36}{4a^2+4b^2+c^2}-\frac{32}{\sqrt{4+4a^2+4b^2+c^2}}.$$

Đặt: $t=\sqrt{4+4a^2+4b^2+c^2}$. Vì a,b,c là các số thực dương nên $t>2$.

Suy ra: $4a^2+4b^2+c^2=t^2-4$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{36}{t^2-4}-\dfrac{32}{t}$ với $t>2$.

$$\Rightarrow f'(t)=\frac{-72t}{(t^2-4)^2}+\frac{32}{t^2}=\frac{32t^4-72t^3-256t^2+512}{(t^2-4)^2.t^2}=\frac{(t-4)(32t^3+56t^2-32t-128)}{(t^2-4)^2.t^2}.$$

Ta có: $32t^3+56t^2-32t-128=(32t^3-128)+(56t^2-32t)=32(t^3-4)+4t(14t-8)>0$ (vì $t>2$).

Do đó $f'(t)=0\Leftrightarrow t=4$.

Bảng biến thiên:

t	2		4		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	0

$$\Rightarrow f(t)\ge -5 \Rightarrow \frac{9}{\sqrt{ab(a+c)(b+c)}}-\frac{32}{\sqrt{4+4a^2+4b^2+c^2}}\ge -5.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\sqrt{4+4a^2+4b^2+c^2}=4\\ a=b\\ c=a+b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}12a^2=12\\ a=b\\ c=2a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ b=1\\ c=2\end{cases}.$

Cách 2:

Ta có:

$$\sqrt{ab(a+c)(b+c)}=\sqrt{(ab+bc)(ab+ac)}\le \frac{ab+bc+ab+ac}{2}.$$

$$\Rightarrow \sqrt{ab(a+c)(b+c)}\le \frac{2ab+bc+ac}{2}.$$

Đồng thời:

$$\sqrt{4+4a^2+4b^2+c^2}=\sqrt{4+\left(2a^2+2b^2\right)+2a^2+\frac{c^2}{2}+2b^2+\frac{c^2}{2}}\ge \sqrt{4+4ab+2ac+2bc}.$$

$$\Rightarrow \sqrt{4+4a^2+4b^2+c^2}\ge \sqrt{4+2(2ab+ac+bc)}.$$

Do đó: $\dfrac{9}{\sqrt{ab(a+c)(b+c)}}-\dfrac{32}{\sqrt{4+4a^2+4b^2+c^2}}\ge \dfrac{18}{2ab+ac+bc}-\dfrac{32}{\sqrt{4+2(2ab+ac+bc)}}.$

Đặt $t=\sqrt{4+2(2ab+ac+bc)}$. Vì a,b,c là các số thực dương nên $t>2$.

$$\Rightarrow 2ab+ac+bc=\frac{t^2-4}{2}.$$

Xét hàm số: $f(t)=\dfrac{36}{t^2-4}-\dfrac{32}{t}$ với $t>2$.

$$\Rightarrow f'(t)=\frac{-72t}{\left(t^2-4\right)^2}+\frac{32}{t^2}=\frac{32t^4-72t^3-256t^2+512}{\left(t^2-4\right)^2.t^2}=\frac{(t-4)\left(32t^3+56t^2-32t-128\right)}{\left(t^2-4\right)^2.t^2}.$$

Ta có: $32t^3+56t^2-32t-128=\left(32t^3-128\right)+\left(56t^2-32t\right)=32\left(t^3-4\right)+4t\left(14t-8\right)>0$ (vì $t>2$).

Do đó $f'(t)=0\Leftrightarrow t=4$.

Bảng biến thiên:

t	2		4		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	0

$$\Rightarrow f(t)\geq -5\Rightarrow \frac{9}{\sqrt{ab(a+c)(b+c)}}-\frac{32}{\sqrt{4+4a^2+4b^2+c^2}}\geq -5.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\sqrt{4+2(2ab+ac+bc)}=4\\ a=b\\ c=a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}12a^2=12\\ a=b\\ c=2a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=1\\ c=2\end{cases}.$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NAM
ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THPT
NĂM HỌC: 2018 – 2019
Môn: Toán – Lớp 12
Thời gian làm bài: 180 phút

Họ và tên: ……..……**SBD:**…….

ĐỀ

Câu 1. (5,0 điểm)

1. Cho hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + (2m+1)x + 3 - m\,(1)$, với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có 2 điểm cực trị A và B sao cho khoảng cách từ điểm $I\left(\frac{1}{2};\frac{15}{4}\right)$ đến đường thẳng AB đạt giá trị lớn nhất.

2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm *M* thuộc trục *Oy*, có tung độ là số nguyên nhỏ hơn 2019 và thỏa mãn từ điểm *M* kẻ được 2 tiếp tuyến tới đồ thị (C) sao cho 2 tiếp điểm tương ứng nằm về 2 phía của trục *Ox* ?

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Cho phương trình sau với m là tham số thực

$$\left(x^2-2x\right)\log^2{}_{2019}\sqrt{x^2-2x+2011}+1 = m\left[\sqrt{\frac{x^2-2x}{8}}\log_{2019}(x^2-2x+2011)-\frac{1}{4}\right]$$

Tìm tất cả các giá trị của m sao cho phương trình trên có đúng hai nghiệm thực phân biệt thỏa

mãn $1 \le |x-1| \le 3$.

2. Giải hệ phương trình sau trên tập số thực: $\begin{cases} 2019^{x+y} = \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{y^2+1}+y\right) & (1) \\ 25x^2+9x\sqrt{9x^2-4} = 2+\dfrac{18y^2}{y^2+1} & (2) \end{cases}$

Câu 3. (2,0 điểm) Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{1+\sin 2x}}+\frac{\sin x-2x\cos x}{e^x(1+\sin 2x)}\right)dx$

Câu 4. (5,0 điểm)

1. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N là hai điểm thay đổi lần lượt thuộc các cạnh AB, AC sao cho mặt phẳng (DMN) luôn vuông góc với mặt phẳng (ABC).
Đặt $AM = x$, $AN = y$. Tìm x, y để tam giác DMN có diện tích nhỏ nhất, lớn nhất.

2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt là hình thoi cạnh a, $BAD = BAA' = A'AD = 60^\circ$.

a) Tính thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$

b) Gọi I, J, G lần lượt là trung điểm $A'D, AB, IJ$. Mặt phẳng (P) đi qua G cắt các cạnh $A'A, A'B, A'D$ lần lượt tại A_1, B_1, D_1 $(A \notin (P), B \notin (P), D \notin (P))$. Gọi $V_{A.A_1B_1D_1}, V_{B.A_1B_1D_1}, V_{D.A_1B_1D_1}$ lần lượt là thể tích các khối chóp $A.A_1B_1D_1, B.A_1B_1D_1, D.A_1B_1D_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = V_{A.A_1B_1D_1} + V_{B.A_1B_1D_1} + V_{D.A_1B_1D_1}$ theo a

Câu 5 . (2,0 điểm) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;-1;0), M(0;1;0)$. Tìm tọa độ điểm H thuộc mặt phẳng $(P): x + y + z + 2 = 0$ biết rằng $AH = \sqrt{2}$ và mặt phẳng (AMH) vuông góc với mặt phẳng (P).

Câu 6. (2,0 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $(a+c)(b+c) = 4c^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{32a^3}{(b+3c)^3} + \dfrac{32b^3}{(a+3c)^3} + (a+b-3c).\sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}}$.

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NAM
ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THPT
NĂM HỌC: 2018 – 2019
Môn: Toán – Lớp 12
Thời gian làm bài: 180 phút

Họ và tên: ……..……**SBD:**…….

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

1. Cho hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + (2m+1)x + 3 - m\,(1)$, với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có 2 điểm cực trị A và B sao cho khoảng cách từ điểm $I\left(\frac{1}{2};\frac{15}{4}\right)$ đến đường thẳng AB đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Nhóm Tác giả: Nguyễn Thị Huỳnh Như; Fb: Nhu Nguyen; Vũ Kiều Oanh; Fb: Rio Vũ Vũ. Trần Ngọc Hiếu; FB: Trần Ngọc Hiếu

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3mx^2 - 6mx + 2m + 1$.

Để hàm số (1) có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ PT: $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 3m^2 - 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 1 \end{array}\right. \quad (*).$$

Ta có: $y = y'.\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3}mx + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}m + \frac{10}{3}$.

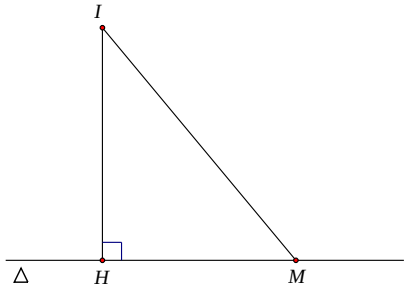
Khi đó đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B của đồ thị hàm số (1) là (Δ): $y = -\frac{2}{3}(m-1)x - \frac{m-10}{3} \Leftrightarrow 2(m-1)x + 3y + m - 10 = 0$.

Giả sử đường thẳng (Δ) luôn đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ cố định với mọi giá trị của m.

Suy ra: $2(m-1)x_0 + 3y_0 + m - 10 = 0, \forall m \Leftrightarrow m(2x_0 + 1) - 2x_0 + 3y_0 - 10 = 0, \forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0+1=0 \\ -2x_0+3y_0-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-\dfrac{1}{2} \\ y_0=3 \end{cases} \Rightarrow M\left(-\dfrac{1}{2};3\right).$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên Δ như hình vẽ



Khi đó : $d(I,\Delta)=IH\le IM$.

Do đó $d(I,\Delta)$ lớn nhất khi $H\equiv M$

$\Leftrightarrow IM\perp\Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{u_\Delta}=0 \Leftrightarrow -3-\dfrac{3}{2}(1-m)=0 \Leftrightarrow m=3$ (thỏa mãn (*))

(vì $\overrightarrow{IM}=\left(-1;-\dfrac{3}{4}\right);\overrightarrow{u_\Delta}=(3;2(1-m))$)

Vậy $m=3$.

Nhận xét: (Lê Thanh Bình)

Xử lý bài toán khoảng cách từ $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{15}{4}\right)$ đến đường thẳng

$AB:2(m-1)x+3y+m-10=0$ bằng đại số như sau: Ta có

$$d(I;AB)=\frac{\left|m-1+\dfrac{45}{4}+m-10\right|}{\sqrt{4(m-1)^2+9}}=\frac{\left|2(m-1)+\dfrac{9}{4}\right|}{\sqrt{4(m-1)^2+9}}$$

Đặt $t=2(m-1)$ ta được $d(I;AB)=\dfrac{\left|t+\dfrac{9}{4}\right|}{\sqrt{t^2+9}} \overset{Bunhiacopxky}{\le} \dfrac{\sqrt{\left[1^2+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\right]\left(t^2+3^2\right)}}{\sqrt{t^2+9}}=\dfrac{5}{4}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{t}{1}=\dfrac{3}{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow t=4 \Leftrightarrow 2(m-1)=4 \Leftrightarrow m=3$ (thỏa mãn (*))

2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm *M* thuộc trục *Oy*, có tung độ là số nguyên nhỏ hơn 2019 và thỏa mãn từ điểm *M* kẻ được 2 tiếp tuyến tới đồ thị (C) sao cho 2 tiếp điểm tương ứng nằm về 2 phía của trục *Ox* ?

Lời giải

Tác giả: Lê Hoàn ; Fb: Lê Hoàn

$y=\dfrac{x+2}{x-1}\Leftrightarrow y=1+\dfrac{3}{x-1}$.

Gọi $M(0;m)\in Oy$.

Gọi tiếp tuyến của (C) đi qua M là đường thẳng $d: y=kx+m$.

Yêu cầu của đề bài, điều kiện là hệ phương trình $\begin{cases} kx+m=1+\dfrac{3}{x-1} & (1) \\ k=\dfrac{-3}{(x-1)^2} & (2) \end{cases}$ có 2 nghiệm

$x_1,\ x_2\neq 1$ và thỏa mãn $\begin{cases} y(x_1)<0 \\ y(x_2)>0 \end{cases}$

Xét điều kiện $\begin{cases} y(x_1)<0 \\ y(x_2)>0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 1+\dfrac{3}{x_1-1}<0 \\ 1+\dfrac{3}{x_2-1}>0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x_1-1}<-\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{x_2-1}>-\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{-3x}{(x-1)^2}+m=1+\dfrac{3}{x-1}\Leftrightarrow \dfrac{3}{(x-1)^2}+\dfrac{6}{x-1}+1-m=0$ (3)

Đặt $\dfrac{1}{x-1}=t\ (t\neq 0)$, phương trình (3) trở thành $3t^2+6t+1-m=0$ (4)

Bài toán trở thành tìm m để phương trình (4) có 2 nghiệm $t_1,\ t_2$ thỏa mãn

$t_1<-\dfrac{1}{3}<t_2\neq 0$

Đặt $f(t)=3t^2+6t+1-m$, với điều kiện trên ta có bảng biến thiên như sau

t	$-\infty$		t_1		$-\frac{1}{3}$		t_2		$+\infty$
$f(t)$		$\searrow$	0	$\searrow$	$f\left(-\frac{1}{3}\right)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra điều kiện là

$$\begin{cases} f\left(-\frac{1}{3}\right)<0 \\ f(0)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(-\frac{1}{3}\right)^2+6\left(-\frac{1}{3}\right)+1-m<0 \\ 1-m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\frac{2}{3} \\ m\neq 1 \end{cases}.$$

Do m là số nguyên nhỏ hơn 2019 nên $m\in\{0;2;3;....;2018\}$

$\Rightarrow$ có 2018 điểm M .

Cách 2 *Tác giả:Nguyễn Ngọc Như Trang ; Fb:nhutrangnguyenngoc*

$$y=\frac{x+2}{x-1}\Rightarrow y'=\frac{-3}{(x-1)^2}$$

Gọi Δ là phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại $K(x_0;y_0)$

Ta có: $(\Delta): y=\frac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{x_0+2}{x_0-1}$

$M\in Oy\Rightarrow M(0;m)$.

$$M\in\Delta\Leftrightarrow m=\frac{-3}{(x_0-1)^2}(-x_0)+\frac{x_0+2}{x_0-1}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x_0\neq 1 \\ m(x_0-1)^2=3x_0+(x_0+2)(x_0-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x_0\neq 1 \\ \mathrm{f}(\mathrm{x}_0)=(m-1)x_0^{\,2}-2(m+2)x_0+m+2=0 \quad (1) \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 khác 1 sao cho $y(x_1).y(x_2)<0$.

- phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 khác 1

$$\Leftrightarrow\begin{cases} m\neq 1 \\ \Delta'>0 \\ f(1)\neq 0 \ \ (luon\ dung) \end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases} m\neq 1 \\ 3(m+2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases} m\neq 1 \\ m>-2 \end{cases} \quad (2) .$$

- $y(x_1).y(x_2)<0 \Leftrightarrow \dfrac{x_1+2}{x_1-1}.\dfrac{x_2+2}{x_2-1}<0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}<0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\dfrac{m+2}{m-1}+\dfrac{4(m+2)}{m-1}+4}{\dfrac{m+2}{m-1}-\dfrac{2(m+2)}{m-1}+1}<0 \Leftrightarrow \dfrac{9m+6}{-3}<0 \Leftrightarrow m>\dfrac{-2}{3}$ (3)

Từ (2),(3) suy ra : $\begin{cases} m\neq 1 \\ m>\dfrac{-2}{3} \end{cases}$

Do $m\in\mathbb{Z}, m<2019$

nên $m\in\{0;2;3;...;2018\}$. Vậy có 2018 giá trị m thỏa đề.

Câu 2.

1. Cho phương trình sau với m là tham số thực

$$\left(x^2-2x\right)\log^2{}_{2019}\sqrt{x^2-2x+2011}+1=m\left[\sqrt{\frac{x^2-2x}{8}}\log_{2019}(x^2-2x+2011)-\frac{1}{4}\right]$$

Tìm tất cả các giá trị của m sao cho phương trình trên có đúng hai nghiệm thực phân biệt thỏa mãn $1\le|x-1|\le 3$.

GIẢI

ĐK. $\begin{cases} x^2-2x\ge 0 \\ x^2-2x+2011>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$

Ta có $1\le|x-1|\le 3 \Leftrightarrow x\in[-2;0]\cup[2;4]$ (*)

PT

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{4}\left(x^2-2x\right)\log^2{}_{2019}(x^2-2x+2011)+1=m\left[\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{x^2-2x}\log_{2019}(x^2-2x+2011)-\dfrac{1}{4}\right]$

$\Leftrightarrow \left(x^2-2x\right)\log^2{}_{2019}(x^2-2x+2011)+4=m\left[\sqrt{2}.\sqrt{x^2-2x}\log_{2019}(x^2-2x+2011)-1\right]$

Đặt $t=\sqrt{x^2-2x}\log_{2019}(x^2-2x+2011)$

$t'=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}\log_{2019}(x^2-2x+2011)+\dfrac{(2x-2)\sqrt{x^2-2x}}{(x^2-2x+2011).\ln 2019}$

$$=(x-1)\left[\frac{\log_{2019}(x^2-2x+2011)}{\sqrt{x^2-2x}}+\frac{2\sqrt{x^2-2x}}{(x^2-2x+2011)\ln 2019}\right]$$

Do đó với $x\in[-2;0]$ thì $t'<0$, với $x\in[2;4]$ thì $t'>0$

Bảng biến thiên

x	-2		0		1		2		4
t'		$-$						$+$	
t	$\sqrt{8}$	↘	0				0	↗	$\sqrt{8}$

Từ bảng biến thiên ta thấy, với mỗi một $t\in\left[0;\sqrt{8}\right]$ sẽ cho ta hai giá trị của $x\in[-2;0]\cup\lfloor 2;4\rfloor$

Như vậy bài toán trở thành tìm m để phương trình sau có một nghiệm $t\in\left[0;\sqrt{8}\right]$

$$t^2+4=m\left(\sqrt{2}.t-1\right)$$

Ta có $t^2+4=m\left(\sqrt{2}.t-1\right)\Leftrightarrow m=\dfrac{t^2+4}{\sqrt{2}.t-1}$ (do $t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ không là nghiệm của pt)

$m'=\dfrac{\sqrt{2}t^2-2t-4\sqrt{2}}{(\sqrt{2}.t-1)^2}$, $m'=0\Leftrightarrow t=2\sqrt{2}$

Bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$2\sqrt{2}$
m'		$-$	‖	$-$	
m	-4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4

Từ bảng biến thiên ta thấy khi $m\in(-\infty;-4]\cup[4;+\infty)$ thì yêu cầu bài toán được thỏa mãn.

Câu 2.2. Giải hệ phương trình sau trên tập số thực: $\begin{cases} 2019^{x+y} = \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{y^2+1}+y\right) & (1) \\ 25x^2+9x\sqrt{9x^2-4} = 2+\dfrac{18y^2}{y^2+1} & (2) \end{cases}$

Lời giải

Tác giả:Trần Ngọc Quang ; Fb:Quang Tran

Điều kiện $|x| \ge \dfrac{2}{3}$

(1) $\Leftrightarrow 2019^x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = 2019^{-y}\left(\sqrt{(-y)^2+1}-(-y)\right)$

$\Leftrightarrow x\ln 2019 + \ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = -y\ln 2019 + \ln\left(\sqrt{(-y)^2+1}-(-y)\right)$(*)

Xét hàm số $f(t) = t\ln 2019 + \ln\left(\sqrt{t^2+1}-t\right), t \in \mathbb{R}$

$f'(t) = \ln 2019 - \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình (*) $\Leftrightarrow x = -y$.

Thay $x = -y$ vào (2) ta có $25x^2+9x\sqrt{9x^2-4} = 2+\dfrac{18x^2}{x^2+1}$ (3)

Nếu $x \ge \dfrac{2}{3}$ thì $18x^2 > \dfrac{18x^2}{x^2+1}, 7x^2 > 2$, suy ra pt (3) vô nghiệm.

Nếu $x \le \dfrac{-2}{3}$ thì (3) $\Leftrightarrow 25-9\sqrt{9-\dfrac{4}{x^2}} = \dfrac{2}{x^2}+\dfrac{18}{x^2+1}$(**)

Đặt $u = \dfrac{1}{x^2}, 0 < u \le \dfrac{9}{4}$, Pt (**) trở thành

$25-9\sqrt{9-4u} = 2u+\dfrac{18u}{u+1} \Leftrightarrow \left(\dfrac{18u}{u+1}-12\right)+2u-4+9\sqrt{9-4u}-9 = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{6(u-2)}{u+1}+2(u-2)-\dfrac{36(u-2)}{\sqrt{9-4u}+1} = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 2 \\ \dfrac{6}{u+1}+2-\dfrac{36}{\sqrt{9-4u}+1} = 0 (4) \end{array}\right.$

Vì $0 \le \sqrt{9-4u} < 3 \Rightarrow 9 < \dfrac{36}{\sqrt{9u-4}+1} \le 36$, $\dfrac{6}{u+1}+2 < 8$, suy ra phương trình (4) vô nghiệm

Với $u=2\Rightarrow \frac{1}{x^2}=2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x=\frac{-1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$

Vì $x\le \frac{-2}{3}\Rightarrow x=\frac{-1}{\sqrt{2}}\Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Câu 3. (2,0 điểm) Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{1+\sin 2x}}+\frac{\sin x-2x\cos x}{e^x(1+\sin 2x)}\right)dx$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thanh Việt ; Fb: Nguyễn Thanh Việt

Ta có:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{1+\sin 2x}}+\frac{\sin x-2x\cos x}{e^x(1+\sin 2x)}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{1+\sin 2x}}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-2x\cos x}{e^x(1+\sin 2x)}dx=I_1+I_2$$

+) Tính $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{1+\sin 2x}}dx$

Ta có: $\sqrt{1+\sin 2x}=\sqrt{(\cos x+\sin x)^2}=|\cos x+\sin x|=\cos x+\sin x$ $(\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right])$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{1+\sin 2x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(\cos x+\sin x)}{\cos x+\sin x}=\ln|\cos x+\sin x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln\sqrt{2}$$

+) Tính $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-2x\cos x}{e^x(1+\sin 2x)}dx$

Đặt $\begin{cases} u=\frac{\sin x-2x\cos x}{e^x} \\ dv=\frac{dx}{1+\sin 2x}=\frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{dx}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} \end{cases}$

Suy ra: $\begin{cases} du=\frac{(2x-1)(\sin x+\cos x)}{e^x}dx \\ v=-\frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\frac{1}{2}.\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x} \end{cases}$

$$I_2=\left(\frac{\sin x-2x\cos x}{e^x}.\frac{-1}{2}.\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}.\frac{(2x-1)(\sin x+\cos x)}{e^x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(2x-1)(\cos x-\sin x)}{e^x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^x(2x\cos x-2x\sin x-\cos x+\sin x)}{e^{2x}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(2\sin x+2x\cos x-\sin x)e^x-e^x(2x\sin x+\cos x)}{e^{2x}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{2x\sin x+\cos x}{e^x}\right)'dx$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{2x\sin x+\cos x}{e^x}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}\pi+2\sqrt{2}}{8e^{\frac{\pi}{4}}}-\frac{1}{2}$$

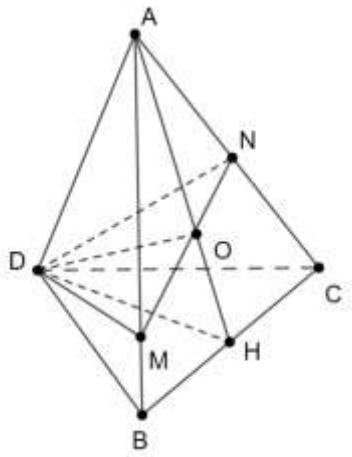
Vậy $I=I_1+I_2=\ln\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}\pi+2\sqrt{2}}{8e^{\frac{\pi}{4}}}-\dfrac{1}{2}$

Câu 4. 1. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N là hai điểm thay đổi lần lượt thuộc các cạnh AB, AC sao cho mặt phẳng (DMN) luôn vuông góc với mặt phẳng (ABC).

Đặt $AM=x$, $AN=y$. Tìm x,y để tam giác DMN có diện tích nhỏ nhất, lớn nhất.

Lời giải

Tác giả: Trần Duy Khương ; Fb:Tran Duy Khuong



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác đều ABC. Do $ABCD$ là tứ diện đều nên $DO \perp (ABC)$. Theo đề bài, mặt phẳng $(DMN) \perp (ABC)$ nên suy ra $O \in MN$.

Tam giác DMN có $DO \perp MN$ nên $S_{\Delta DMN} = \frac{1}{2} DO.MN$. Mà DO là hằng số nên $S_{\Delta DMN}$ lớn nhất khi MN lớn nhất, nhỏ nhất khi MN nhỏ nhất.

Áp dụng định lí cosin trong tam giác AMN ta có $MN^2 = x^2 + y^2 - xy = (x+y)^2 - 3xy$.

Như vậy M, N thay đổi sao cho đoạn thẳng MN luôn đi qua O. Ta có $0 < x, y \le 1$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AC} - x\overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AH} - x\overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{3} - x\right)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Vì $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MO}$ cùng hướng nên $\frac{\frac{1}{3}}{y} = \frac{\frac{1}{3} - x}{-x} > 0 \Leftrightarrow y\left(\frac{1}{3} - x\right) = -\frac{1}{3}x \Leftrightarrow 3xy = x + y$.

Từ $0 < x, y \le 1$, ta có $x + y = 3xy \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 3 - \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{x} \le 2 \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{2}$

Ta có $MN^2 = (x+y)^2 - (x+y)$.

Đặt $t = x + y$. Ta có $t = x + \frac{x}{3x-1}$ với $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, $t'(x) = \frac{3x(3x-2)}{(3x-1)^2}$. Bảng biến thiên:

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1
t'		$-$	0	$+$	
t	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$

Quan sát bảng biến thiên, ta có $\frac{4}{3} \le t \le \frac{3}{2}$.

Ta có $MN^2 = f(t) = t^2 - t$. Khảo sát sự biến thiên của hàm $f(t)$ trên đoạn $\left[\frac{4}{3};\frac{3}{2}\right]$ ta được

$$MN \text{ min} \Leftrightarrow t = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}, \; MN \text{ max} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{3}{2} \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, y = \frac{1}{2} \\ y = 1, x = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

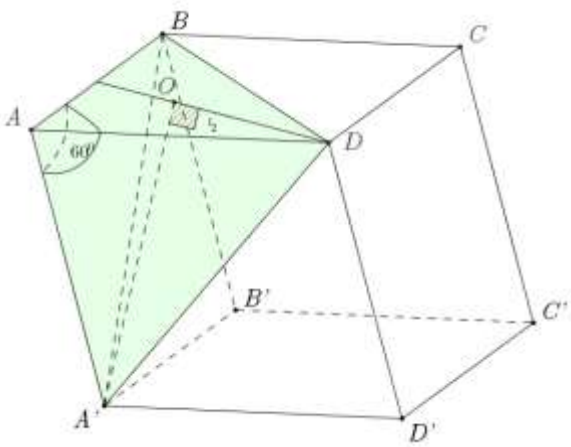
2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt là hình thoi cạnh a, $BAD = BAA' = A'AD = 60^\circ$.

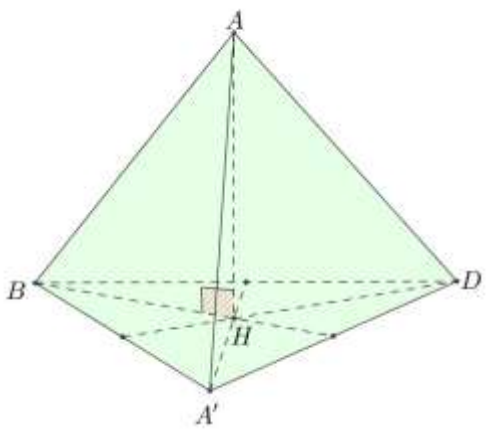
a) Tính thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$

b) Gọi I, J, G lần lượt là trung điểm $A'D, AB, IJ$. Mặt phẳng (P) đi qua G cắt các cạnh $A'A, A'B, A'D$ lần lượt tại A_1, B_1, D_1 $(A \notin (P), B \notin (P), D \notin (P))$. Gọi $V_{A.A_1B_1D_1}, V_{B.A_1B_1D_1}, V_{D.A_1B_1D_1}$ lần lượt là thể tích các khối chóp $A.A_1B_1D_1, B.A_1B_1D_1, D.A_1B_1D_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = V_{A.A_1B_1D_1} + V_{B.A_1B_1D_1} + V_{D.A_1B_1D_1}$ theo a

Lời Giải

Tác giả: Nguyễn Tuấn Phương ; Fb:phuongnguyentuan86





1. Các tam giác $ABD, AA'D, AA'B$ là các tam giác đều suy ra $A'B = BD = A'D = a$. Do đó tứ diện $AA'BD$ là tứ diện đều có cạnh bằng a.

Gọi H là trọng tâm tam giác $A'BD$. Ta có $BH = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Tam giác ABH vuông tại H nên $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $S_{A'BD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{A.A'BD} = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Suy ra $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 6.V_{A.A'BD} = 6.\frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Cách khác:

Gọi O là trọng tâm ΔABD, tứ diện $A'ABD$ là tứ diện đều nên $A'O$ vuông góc với mặt phẳng (ABD). Do đó $A'O$ là chiều cao của hình hộp.

Ta có $A'O = \sqrt{A'D^2 - OD^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

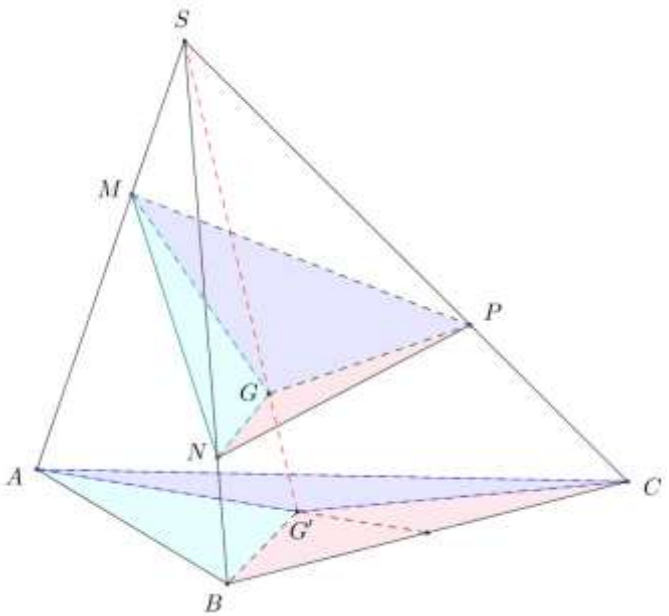
$S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABD} = 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Vậy

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'O.S_{ABCD} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

2. **Bổ đề:** Cho tứ diện $SABC$ có $SA = SB = SC = 1$. Một mặt phẳng (P) thay đổi qua trọng tâm G của tứ diện lần lượt cắt SA, SB, SC tại M, N, P.

$CMR: \frac{1}{SM} + \frac{1}{SN} + \frac{1}{SP} = 4$.

Chứng minh:



Gọi G' là trọng tâm ΔABC. Theo tính chất trọng tâm của tứ diện ta có S, G, G' thẳng hàng và $\frac{SG}{SG'} = \frac{3}{4}$. Thêm nữa $V_{SABGG'} = V_{SBCG'} = V_{SG'CA} = \frac{1}{3}V_{SABC}$.

Ta có:

$\frac{V_{SMNG}}{V_{SABG'}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SG}{SG'}\Leftrightarrow\frac{3V_{SMNG}}{V_{SABC}}=\frac{3SM.SN}{4}\Leftrightarrow\frac{V_{SMNG}}{V_{SABC}}=\frac{SM.SN}{4}$ (1) (Lưu ý $SA=SB=1$).

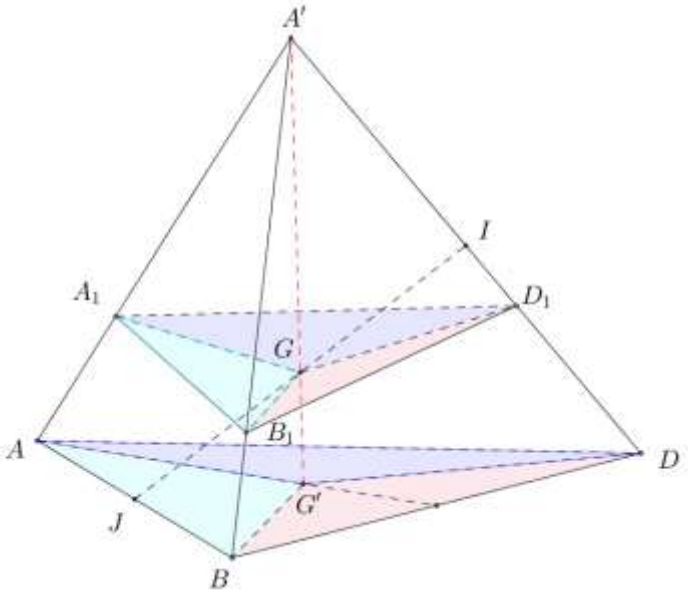
Lập luận tương tự thu được $\frac{V_{SNPG}}{V_{SABC}}=\frac{SN.SP}{4}$ (2) và $\frac{V_{SGPM}}{V_{SG'CA}}=\frac{SP.SM}{4}$ (3).

Cộng theo vế các đẳng thức (1), (2), (3) ta được

$\frac{V_{SMNP}}{V_{SABC}}=\frac{SM.SN+SN.SP+SP.SM}{4}\Leftrightarrow\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC}=\frac{SM.SN+SN.SP+SP.SM}{4}$

$\Leftrightarrow 4.SM.SN.SP=SM.SN+SN.SP+SP.SM\Leftrightarrow\frac{1}{SM}+\frac{1}{SN}+\frac{1}{SP}=4$.

Quay lại bài toán đã cho:



G là trung điểm đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh đối của tứ diện $A'ABD$ nên G là trọng tâm tứ diện. Coi a là một đơn vị dài. Áp dụng bổ đề trên cho tứ diện $A'ABD$ với G là trọng tâm tứ diện và A_1,B_1,D_1 lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (P) qua G với các cạnh $A'A,A'B,A'D$.

Ta có: $\frac{1}{A'A_1}+\frac{1}{A'B_1}+\frac{1}{A'D_1}=4$.

Đặt $A'A_1=x;\ A'B_1=y;\ A'D_1=z\,(0<x,y,z<1)$ ta được $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$4=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}\Leftrightarrow\frac{27}{xyz}\le 64\Leftrightarrow xyz\ge\frac{27}{64}$.

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=\frac{3}{4}$ (mặt phẳng (P) song song với (ABD)).

Mặt khác

$\frac{V_{AA_1B_1D_1}}{V_{A'A_1B_1D_1}}=\frac{AA_1}{A'A_1}=\frac{1-x}{x};\ \frac{V_{BA_1B_1D_1}}{V_{A'A_1B_1D_1}}=\frac{BB_1}{A'B_1}=\frac{1-y}{y};\ \frac{V_{DA_1B_1D_1}}{V_{A'A_1B_1D_1}}=\frac{DD_1}{A'D_1}=\frac{1-z}{z}$ và

$$\frac{V_{A'A_1B_1D_1}}{V_{A'ABD}}=\frac{A'A_1}{A'A}.\frac{A'B_1}{A'B}.\frac{A'D_1}{A'D}=xyz\Leftrightarrow V_{A'A_1B_1D_1}=xyz.V_{A'ABD}$$

Suy ra

$$T=\left(\frac{1}{x}-1+\frac{1}{y}-1+\frac{1}{z}-1\right).V_{A'A_1B_1D_1}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-3\right).xyz.V_{A'ABD}=xyz.V_{A'ABD}\geq\frac{27}{64}V_{A'ABD}$$

Mà $V_{A'ABD}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}\Rightarrow T\geq\frac{27}{64}.\frac{a^3\sqrt{2}}{12}\Rightarrow T_{\min}\geq\frac{9a^3\sqrt{2}}{256}$ đạt được khi mp (P) song song với mp (ABD).

Cách trình bày khác: (Theo thầy Kiên Nguyễn)

Chứng minh được $\frac{A'A}{A'A_1}+\frac{A'B}{A'B_1}+\frac{A'D}{A'D_1}=4\Rightarrow\frac{AA_1}{A'A_1}+\frac{BB_1}{A'B_1}+\frac{DD_1}{A'D_1}=1$ (cách chứng minh tương tự như bổ đề trên)

Đặt

$$h_1=d\left(A;(A_1B_1D_1)\right);h_2=d\left(B;(A_1B_1D_1)\right);h_3=d\left(C;(A_1B_1D_1)\right);h=d\left(A';(A_1B_1D_1)\right)$$

Ta có $\frac{h_1}{h}=\frac{AA_1}{A'D_1};\frac{h_2}{h}=\frac{BB_1}{A'B_1};\frac{h_3}{h}=\frac{DD_1}{A'D_1}\Rightarrow\frac{h_1}{h}+\frac{h_2}{h}+\frac{h_3}{h}=1\Leftrightarrow h_1+h_2+h_3=h$.

$$V_{A.A_1B_1D_1}+V_{B.A_1B_1D_1}+V_{D.A_1B_1D_1}=\frac{1}{3}S_{\Delta A_1B_1D_1}.(h_1+h_2+h_3)=\frac{1}{3}h.S_{\Delta A_1B_1D_1}=V_{A'A_1B_1D_1}$$

Lại có $\frac{V_{A'A_1B_1D_1}}{V_{A'.ABD}}=\frac{AA'}{A'A_1}.\frac{A'B}{A'B_1}.\frac{A'D}{A'D_1}\leq\left(\frac{\frac{AA'}{A'A_1}+\frac{A'B}{A'B_1}+\frac{A'D}{A'D_1}}{3}\right)^3=\frac{64}{27}$

$$\Rightarrow V_{A'A_1B_1D_1}\geq\frac{27}{64}V_{A'.ABD}=\frac{27}{64}.\frac{a^3\sqrt{2}}{12}=\frac{9a^3\sqrt{2}}{256}.$$

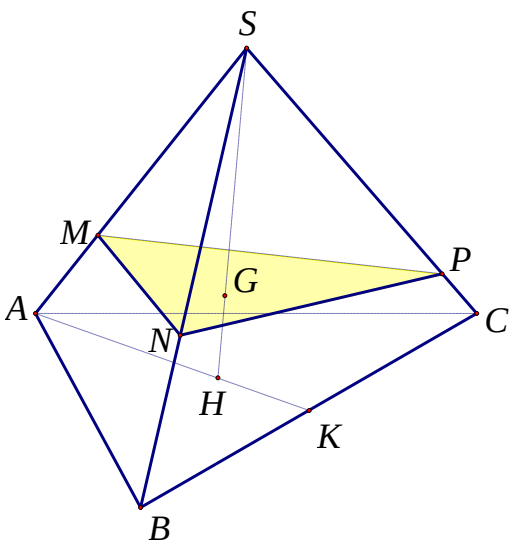
Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\frac{AA'}{A'A_1}=\frac{A'B}{A'B_1}=\frac{A'D}{A'D_1}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow(A_1B_1D_1)//(ABD)$.

Vậy $\min T=\frac{9a^3\sqrt{2}}{256}$ đạt được khi $(P)//(ABD)$.

Nhận xét: (Lê Thanh Bình) Cách chứng minh bằng vectơ cho bổ đề:

Bổ đề: Cho tứ diện $SABC$ có $SA=SB=SC=a$. Một mặt phẳng (P) thay đổi qua trọng tâm G của tứ diện lần lượt cắt SA,SB,SC tại M,N,P. $CMR:\frac{1}{SM}+\frac{1}{SN}+\frac{1}{SP}=\frac{4}{a}$.

Chứng minh:



Ta có $\overrightarrow{SM}=x\overrightarrow{SA},\ \overrightarrow{SN}=y\overrightarrow{SB},\ \overrightarrow{SP}=z\overrightarrow{SC}$ với

$x=\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{SM}{a};\ y=\dfrac{SN}{SB}=\dfrac{SN}{a};\ z=\dfrac{SP}{SC}=\dfrac{SP}{a}$

Vì G là trọng tâm tứ diện $S.ABC$ nên ta có $SG\cap(ABC)=H$ với H là trọng tâm tam giác ABC . Suy ra

$\overrightarrow{SG}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{SH}=\dfrac{3}{4}.\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x}\overrightarrow{SM}+\dfrac{1}{y}\overrightarrow{SN}+\dfrac{1}{z}\overrightarrow{SP}\right)$

Vì M,N,P,G đồng phẳng nên $\dfrac{1}{4x}+\dfrac{1}{4y}+\dfrac{1}{4z}=1\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=4$

$\Leftrightarrow\dfrac{a}{SM}+\dfrac{a}{SN}+\dfrac{a}{SP}=4$

Hay $\dfrac{1}{SM}+\dfrac{1}{SN}+\dfrac{1}{SP}=\dfrac{4}{a}$

dnk260690@gmail.com

Câu 5 . (*2 điểm*) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;-1;0),M(0;1;0)$. Tìm tọa độ điểm H thuộc mặt phẳng $(P):x+y+z+2=0$ biết rằng $AH=\sqrt{2}$ và mặt phẳng (AMH) vuông góc với mặt phẳng (P).

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{n_P}=(1;1;1)$; $\overrightarrow{AM}=(1;2;0)=\overrightarrow{u_{AM}}$. Ta có: $\left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{AM}\right]=(2;-1;-1)$.

Mặt phẳng (AMH) chứa AM và vuông góc với mặt phẳng (P) nên phương trình mặt phẳng (AMH) là : $2x-y-z+1=0$.

Gọi $H(x;y;z)$, ta có: $\overrightarrow{AH}=(x+1;y+1;z)$ và $AH^2=2\Leftrightarrow(x+1)^2+(y+1)^2+z^2=2$.

Vì H thuộc mặt phẳng (P) nên ta có hpt: $\begin{cases} 2x-y-z+1=0 \\ x+y+z+2=0 \\ (x+1)^2+(y+1)^2+z^2=2 \end{cases}$ giải hpt ta được

$H_1=(-1;0;-1)$ và $H_2=(-1;-2;1)$

Câu 6. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $(a+c)(b+c)=4c^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{32a^3}{(b+3c)^3}+\dfrac{32b^3}{(a+3c)^3}+(a+b-3c).\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}$.

Lời giải

Tác giả: Lê Đức Hợp ; Fb: Le Hoop

Bổ đề: Cho m, n là hai số thực dương khi đó ta có

a) $\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}\ge\dfrac{8}{(m+n)^2}$.

b) $\dfrac{m^3+n^3}{2}\ge\left(\dfrac{m+n}{2}\right)^3$.

Thật vậy

a) Ta có $\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}\ge 2.\dfrac{1}{m}.\dfrac{1}{n}=2\dfrac{1}{m.n}\ge 2.\dfrac{4}{(m+n)^2}=\dfrac{8}{(m+n)^2}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow m=n$.

b) $\dfrac{m^3+n^3}{2}\ge\left(\dfrac{m+n}{2}\right)^3 \Leftrightarrow 4m^3+4n^3\ge m^3+3m^2.n+3m.n^2+n^3$

$\Leftrightarrow m^3+n^3-m^2.n-m.n^2\ge 0 \Leftrightarrow (m-n)^2(m+n)\ge 0$ (luôn đúng với m, n là hai số thực dương).

Vậy $\dfrac{m^3+n^3}{2}\ge\left(\dfrac{m+n}{2}\right)^3$ $\forall m$, $n>0$; Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow m=n$.

Áp dụng vào bài toán.

Ta có $(a+c)(b+c)=4c^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{c}+1\right)\left(\dfrac{b}{c}+1\right)=4$.

Đặt $x=\dfrac{a}{c}>0$; $y=\dfrac{b}{c}>0$. Từ giả thiết ta có $(x+1)(y+1)=4$.

$$P=\frac{32a^3}{(b+3c)^3}+\frac{32b^3}{(a+3c)^3}+(a+b-3c).\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}$$

$$\geq\frac{32\left(\frac{a}{c}\right)^3}{\left(\frac{b}{c}+3\right)^3}+\frac{32\left(\frac{b}{c}\right)^3}{\left(\frac{a}{c}+3\right)^3}+(a+b-3c).\sqrt{\frac{8}{(a+b)^2}}$$

$$\Rightarrow P\geq\frac{32\left(\frac{a}{c}\right)^3}{\left(\frac{b}{c}+3\right)^3}+\frac{32\left(\frac{b}{c}\right)^3}{\left(\frac{a}{c}+3\right)^3}+2\sqrt{2}-\frac{6\sqrt{2}c}{a+b}=\frac{32\left(\frac{a}{c}\right)^3}{\left(\frac{b}{c}+3\right)^3}+\frac{32\left(\frac{b}{c}\right)^3}{\left(\frac{a}{c}+3\right)^3}+2\sqrt{2}-\frac{6\sqrt{2}}{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}}$$

$$\Rightarrow P\geq\frac{32x^3}{(y+3)^3}+\frac{32y^3}{(x+3)^3}+2\sqrt{2}-\frac{6\sqrt{2}}{x+y}=32\left[\left(\frac{x}{y+3}\right)^3+\left(\frac{y}{x+3}\right)^3\right]+2\sqrt{2}-\frac{6\sqrt{2}}{x+y}$$

$$\Rightarrow P\geq 8.\left(\frac{x}{y+3}+\frac{y}{x+3}\right)^3+2\sqrt{2}-\frac{6\sqrt{2}}{x+y}.$$

Ta có $\frac{x}{y+3}+\frac{y}{x+3}=\frac{x^2+3x+y^2+3y}{(x+3)(y+3)}=\frac{(x+y)^2+3(x+y)-2xy}{xy+3(x+y)+9}$.

Từ $(x+1)(y+1)=4\Leftrightarrow xy+x+y=3\Leftrightarrow xy=3-x-y$.

Ta có $3=xy+x+y\leq\frac{(x+y)^2}{4}+x+y\Leftrightarrow\frac{(x+y)^4}{4}+(x+y)-3\geq 0\Leftrightarrow x+y\geq 2$ (vì $x+y>0$).

Đặt $t=x+y\geq 2$. Ta có $xy=3-t$.

Khi đó

$$P\geq 8.\left[\frac{(x+y)^2+3(x+y)-2xy}{xy+3(x+y)+9}\right]^3+2\sqrt{2}-\frac{6\sqrt{2}}{x+y}=8.\left[\frac{t^2+3t-2(3-t)}{3-t+3t+9}\right]^3+2\sqrt{2}-\frac{6\sqrt{2}}{t}.$$

$$\Rightarrow P\geq 8.\left(\frac{t^2+5t-6}{2t+12}\right)^3+2\sqrt{2}-\frac{6\sqrt{2}}{t}=(t-1)^3-\frac{6\sqrt{2}}{t}+2\sqrt{2}.$$

Xét hàm $f(t)=(t-1)^3-\frac{6\sqrt{2}}{t}+2\sqrt{2}$ trên $[2;+\infty)$.

Ta có

$$f'(t)=3(t-1)^2+\frac{6\sqrt{2}}{t^2}>0\quad\forall t\in[2;+\infty).$$

Vậy hàm số $f(t)=(t-1)^3-\frac{6\sqrt{2}}{t}+2\sqrt{2}$ đồng biến trên $[2;+\infty)$.

Từ đó suy ra $P\ge f(t)\ge f(2)=1-\sqrt{2}$.

Vậy $P_{min}=1-\sqrt{2}$ xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1\Leftrightarrow a=b=c$.

HẾT

GIẢI CHI TIẾT ĐỀ CHỌN HSG LỚP 12 TỈNH ĐIỆN BIÊN NĂM HỌC 2018-2019 MÔN TOÁN TIME: PHÚT

ĐỀ BÀI

Câu 1. (6,0 điểm)

1. Cho hàm số $y=\frac{2x-3}{x-2}$ (C) và đường thẳng $d: x-y-1=0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đó song song với d.

2. Tìm m để hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x+m+2$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\frac{2\sin^2 x}{\sin^4\frac{x}{2}+\cos^4\frac{x}{2}}$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3-3(2x^2-y^2+2y)+15x-10=0 \\ \sqrt{2-y}+\sqrt{3-x}=2x-2 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Câu 3. (4,0 điểm)

1. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau được chọn từ các số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 ; 8; 9. Xác định số phần tử của S. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn là số chẵn.

2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(0;9)$, $B(3;6)$. Gọi D là miền nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x-y+a\le 0 \\ 6x+3y+5a\ge 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của a để $AB\subset D$.

Câu 4 . (4,0 điểm)

1. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên các đoạn thẳng lần lượt lấy các điểm A',B',C' khác với S. Chứng minh rằng: $\dfrac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}}=\dfrac{SA}{SA'}.\dfrac{SB}{SB'}.\dfrac{SC}{SC'}$

2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có $AB=a, SA=a\sqrt{3}$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, gọi G là trọng tâm tam giác SCD.

a) Tính thể tích khối chóp $S.OGC$.

b) Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC).

c) Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SA và BG.

Câu 5. (2,0 điểm)

1. Cho phương trình $(m+2)\sqrt{x(x^2+1)}-x^2+(m-6)x-1=0$ (1). Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm thực.

2. Cho đa thức $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+ax+1$ có nghiệm thực. Chứng minh rằng $a^2+b^2-4b+1>0$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (6,0 điểm)

1. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ (C) và đường thẳng $d: x-y-1=0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đó song song với d.

2. Tìm m để hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x+m+2$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Lời giải

Tác giả: Lê Hoàn; Fb: Lê Hoàn

1. $d: x-y-1=0 \Leftrightarrow d: y=x-1 \Rightarrow d$ có hệ số góc $k_d=1$.

Xét hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ có:

+ Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

+ $y'=\dfrac{1}{(x-1)^2}$, $\forall x\neq 1$.

Gọi đường thẳng Δ là tiếp tuyến của (C) tại điểm $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-3}{x_0-1}\right)$ (với $x_0\neq 1$).

Δ có hệ số góc là $k_\Delta=\dfrac{1}{(x_0-1)^2}$ và phương trình $\Delta: y=\dfrac{1}{(x_0-1)^2}.x-\dfrac{x_0}{(x_0-1)^2}+\dfrac{2x_0-3}{x_0-1}$.

+ Giả sử $\Delta//d$ ta được $k_\Delta=k_d\Leftrightarrow\dfrac{1}{(x_0-1)^2}=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=2\end{array}\right.$.

+ Thử lại:

- $x_0=0\Rightarrow\Delta: y=x+3$ thỏa mãn $\Delta//d$.
- $x_0=2\Rightarrow\Delta: y=x-1\Rightarrow\Delta\equiv d$ không thỏa mãn.

Vậy tiếp tuyến cần tìm là $\Delta: y=x+3$.

2. $y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m-1\\x=m+1\end{array}\right.$ (Hai nghiệm phân biệt với mọi m)

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$m-1$		$m+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	y_1	↘	y_2	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)\Leftrightarrow(2;+\infty)\subset(m+1;+\infty)\Leftrightarrow m+1\leq 2\Leftrightarrow m\leq 1$.

Vậy giá trị của m cần tìm là: $m\leq 1$.

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{2\sin^2 x}{\sin^4\dfrac{x}{2}+\cos^4\dfrac{x}{2}}$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3-3\left(2x^2-y^2+2y\right)+15x-10=0 \\ \sqrt{2-y}+\sqrt{3-x}=2x-2 \end{cases}\left(x;y\in\mathbb{R}\right)$

Tác giả: Phạm Trung Khuê ; Fb: Phạm Trung Khuê

Lời giải

1. Ta có $\sin^4\dfrac{x}{2}+\cos^4\dfrac{x}{2}=1-2\sin^2\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 x=\dfrac{2-\sin^2 x}{2}\neq 0,\forall x$

Khi đó $f(x)=\dfrac{4\sin^2 x}{2-\sin^2 x}=\dfrac{8}{2-\sin^2 x}-4$.

Vì $0\le\sin^2 x\le 1\Rightarrow 1\le 2-\sin^2 x\le 2$ nên $4\le\dfrac{8}{2-\sin^2 x}\le 8$. Do đó $0\le f(x)\le 4$.

Ta có $f(x)=0\Leftrightarrow\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$,

$f(x)=4\Leftrightarrow\sin^2 x=1\Leftrightarrow\sin x=\pm 1\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là 0 đạt được khi $x=k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$, giá trị lớn nhất của $f(x)$ là 4 đạt được khi $x=\pm\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

2. Điều kiện: $\begin{cases} x\le 3 \\ y\le 2 \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$\left(x-2\right)^3+3\left(x-2\right)=\left(y-1\right)^3+3\left(y-1\right)\qquad(1)$

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t,\left(t\in\mathbb{R}\right)$.

Khi đó ta có $f'\left(t\right)=3t^2+3>0,\forall t\in\mathbb{R}$. Do đó $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nên phương trình (1) trở thành $f\left(x-2\right)=f\left(y-1\right)\Leftrightarrow x-2=y-1\Leftrightarrow y=x-1$.

Thay $y=x-1$ vào phương trình thứ hai ta được:

$2\sqrt{3-x}=2x-2 \Leftrightarrow \sqrt{3-x}=x-1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ 3-x=x^2-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$

Với $x=2$ thì $y=1$ (thỏa mãn).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=(2;1)$.

Câu 3.(4,0 điểm)

1. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau được chọn từ các số 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9. Xác định số phần tử của S. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn là số chẵn.

2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(0;9)$, $B(3;6)$. Gọi D là miền nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x-y+a\le 0 \\ 6x+3y+5a\ge 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của a để $AB\subset D$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thanh Việt ; Fb: Nguyễn Thanh Việt

1. Số phần tử của tập S là $n(S)=9.9.8.7.6=27216$.

Gọi số chẵn thuộc tập S có dạng $\overline{abcde}(a\ne 0)$.

Nếu $e\in\{2;4;6;8\}$, trường hợp này ta có: $8.8.7.6.4=10752$ số.

Nếu $e=0$, trường hợp này ta có: $9.8.7.6=3024$ số.

Vậy xác suất cần tìm là: $P=\dfrac{10752+3024}{27216}=\dfrac{13776}{27216}=\dfrac{41}{81}$.

2. Phương trình đường thẳng $AB: x+y-9=0$.

Trường hợp 1: Nếu AB là đường thẳng.

Xét hệ $\begin{cases} a\le -2x+y \\ 5a\ge -6x-3y \end{cases}$.

Dễ thấy điểm $C(7;2)\in AB$ nhưng $C\notin D$ vì $\begin{cases} a\le -12 \\ 5a\ge -48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\le -12 \\ a\ge \dfrac{-48}{5} \end{cases} \Leftrightarrow a\in\varnothing$.

Trường hợp 2: Nếu AB là đoạn thẳng. Ta thay $y=9-x\left(x\in[0;3]\right)$ vào hệ $\begin{cases} a\le -2x+y \\ 5a\ge -6x-3y \end{cases}$

Ta được: $\begin{cases} a\le 9-3x \\ a\ge \dfrac{-3x-27}{5} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{-3x-27}{5}\le a\le 9-3x$ (*)

(*) đúng $\forall x\in[0;3]\Leftrightarrow -\dfrac{27}{5}\le a\le 0$.

Vậy $-\dfrac{27}{5}\le a\le 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4 . (4,0 điểm)

1. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên các đoạn thẳng lần lượt lấy các điểm A',B',C' khác với S. Chứng minh rằng: $\dfrac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}}=\dfrac{SA}{SA'}.\dfrac{SB}{SB'}.\dfrac{SC}{SC'}$

2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có $AB=a, SA=a\sqrt{3}$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, gọi G là trọng tâm tam giác SCD.

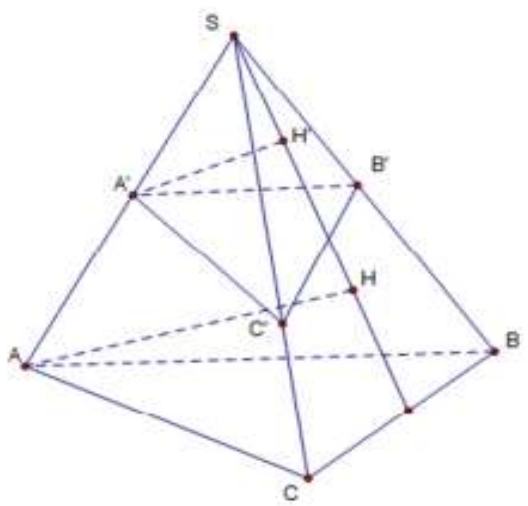
a) Tính thể tích khối chóp $S.OGC$.

b) Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC).

c) Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SA và BG.

Lời giải

1.



Gọi H,H' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A,A' trên (SBC).

Ta có $\frac{AH}{AH'}=\frac{SA}{SA'}$

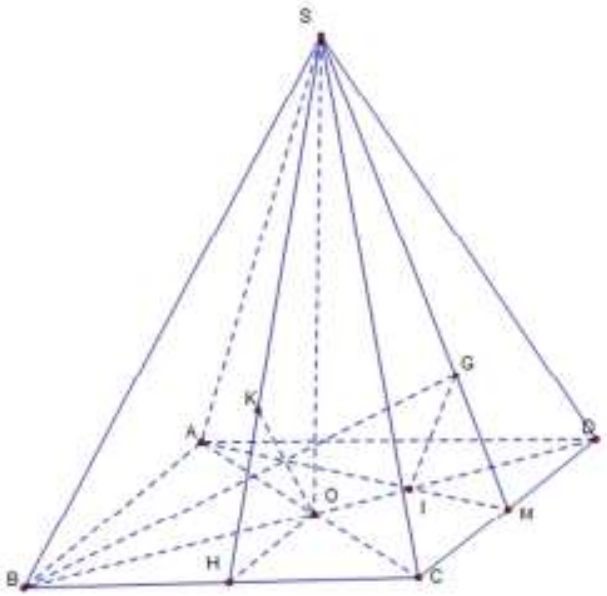
$S_{SBC}=\frac{1}{2}SB.SC.\sin BSC; S_{SB'C'}=\frac{1}{2}SB'.SC'.\sin BSC$

Khi đó $V_{S.ABC}=V_{A.SBC}=\frac{1}{3}AH.S_{SBC}=\frac{1}{6}AH.SB.SC.\sin BSC$

$V_{S.A'B'C'}=V_{A'.SB'C'}=\frac{1}{3}A'H'.S_{SB'C'}=\frac{1}{6}A'H'.SB'.SC'.\sin BSC$

Vậy $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}}=\frac{AH}{A'H'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}=\frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}$

2.



a) Ta có $AC=a\sqrt{2}; SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\frac{a\sqrt{10}}{2}$

Gọi M là trung điểm của CD

Khi đó $V_{S.OCM}=\frac{1}{6}SO.OM.MC=\frac{a^3\sqrt{10}}{48}$

$\frac{V_{S.OCG}}{V_{S.OCM}}=\frac{SG}{SM}=\frac{2}{3}$

Suy ra $V_{S.OGC}=\frac{2}{3}V_{S.OMC}=\frac{a^3\sqrt{10}}{72}$.

b) Ta có $d(G,(SBC))=\frac{2}{3}d(M,(SBC))=\frac{2}{3}d(O,(SBC))$

Gọi H là trung điểm BC, K là hình chiếu vuông góc của O trên SH.

Ta có $\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{OH^2}+\frac{1}{SO^2}=\frac{4}{a^2}+\frac{4}{10a^2}=\frac{22}{5a^2}$

$d(O;(\text{SBC}))=\text{OK}=\frac{a\sqrt{10}}{22}$

$d(G,(SBC))=\frac{2}{3}d(O,(SBC))=\frac{a\sqrt{110}}{33}$

c) Gọi I là giao của BD và AM, I là trọng tâm tam giác ADC.

Suy ra $IG//SA$ nên góc giữa hai đường thẳng SA,BG bằng góc giữa hai đường thẳng IG,BG

Ta có $IG=\frac{1}{3}SA=\frac{a\sqrt{3}}{3};BI=\frac{2a\sqrt{2}}{3};BG=\frac{a\sqrt{11}}{3}$

$\cos IGB=\frac{BG^2+IG^2-BI^2}{2.BG.IG}=\frac{\sqrt{33}}{11}$.

Câu 5. (2,0 điểm)

1. Cho phương trình $(m+2)\sqrt{x(x^2+1)}-x^2+(m-6)x-1=0$ (1). Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm thực.

2. Cho đa thức $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+ax+1$ có nghiệm thực. Chứng minh rằng $a^2+b^2-4b+1>0$.

Lời giải

Tác giả: Minh Hạnh; Fb: fb.com/meocon2809

Câu 5.1.

Điều kiện: $x\ge 0$.

- Với $x=0$ thì phương trình vô nghiệm.

- Với $x>0$, Phương trình $(1)\Leftrightarrow(m+2)\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}-\frac{x^2+1}{x}+m-6=0$.

Đặt $t=\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}\Rightarrow\begin{cases}t\ge\sqrt{2}\\ t^2=\frac{x^2+1}{x}\end{cases}$;

Ta được phương trình mới theo ẩn phụ: $(m+2)t-t^2+m-6=0 \Leftrightarrow \dfrac{t^2-2t+6}{t+1}=m \ \ (2)$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2-2t+6}{t+1} \Rightarrow f'(t)=\dfrac{t^2+2t-8}{(t+1)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-4 \ (l) \\ t=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-4		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
y'		+	0	-		-	0	+	
y					$2\sqrt{2}-2$	↘	2	↗	$+\infty$

Nhìn bảng biến thiên ta thấy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m \ge 2$.

Câu 5.2

Giả sử đa thức đã cho có nghiệm trong trường hợp $a^2+b^2-4b+1 \le 0$.

Ta có: $a^2+b^2-4b+1 \le 0 \Leftrightarrow a^2+(b-2)^2 \le 3 \ (1)$.

Vì $x=0$ không là nghiệm của phương trình $f(x)=0$ nên:

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0 \Leftrightarrow \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+a\left(x+\frac{1}{x}\right)+b=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2+a\left(x+\frac{1}{x}\right)+b-2=0$$

Đặt $t=x+\dfrac{1}{x}$ thì phương trình trên có nghiệm khi và chỉ khi $t^2+at+b-2=0$ có nghiệm thỏa mãn $|t| \ge 2$.

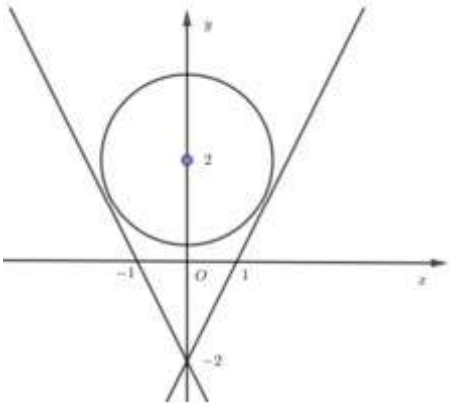
Xét hàm số $g(t)=t^2+at+b-2$

Ta có: $g'(t)=2t+a, g'(t)=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{-a}{2}$. Như (1) trên thì $\dfrac{-a}{2} \notin (-2;2)$

Do đó ta có bảng biến thiên

t	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(t)$		-				+	
$g(t)$	$+\infty$	↘	$-2a+b+2$		$2a+b+2$	↗	$+\infty$

Phương trình có nghiệm thì $\begin{cases} -2a+b+2\le 0 & (2) \\ 2a+b+2\le 0 & (3) \end{cases}$



Những điểm $M(a;b)$ thoả (1) thì nằm bên trong hoặc biên đường tròn tâm $I(0;2)$ và bán kính bằng $\sqrt{3}$.

Những điểm $N(a;b)$ thoả mãn (2) và (3) là những điểm thuộc phần không chứa gốc tạo độ của các đường thẳng $\left[\begin{array}{l} -2x+y+2=0 \\ 2x+y+2=0 \end{array}\right.$

Những phần đó theo hình vẽ là không có điểm chung, vì vậy ta có mâu thuẫn.

Ta có điều phải chứng minh: Nếu đa thức đã cho có nghiệm thì $a^2+b^2-4b+1>0$

Chú ý: Bài có thể giải nhanh như sau:

$$t^2+at+b-2=0 \Leftrightarrow t^2=-at+2-b \Rightarrow t^4=(-at+2-b)^2 \le \left[a^2+(b-2)^2\right]\left(1+t^2\right)$$

$$\Rightarrow a^2+(b-2)^2 > \frac{t^4-1}{t^2+1}=t^2-1\ge 3 \Rightarrow a^2+b^2-4b+1>0$$

---HẾT---

GIẢI CHI TIẾT ĐỀ CHỌN HSG LỚP 12
TỈNH ĐIỆN BIÊN NĂM HỌC 2018-2019
MÔN TOÁN
TIME: PHÚT

ĐỀ BÀI

Câu 1. (6,0 điểm)

1. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ (C) và đường thẳng $d: x-y-1=0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đó song song với d.

2. Tìm m để hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x+m+2$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{2\sin^2 x}{\sin^4\dfrac{x}{2}+\cos^4\dfrac{x}{2}}$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3-3(2x^2-y^2+2y)+15x-10=0 \\ \sqrt{2-y}+\sqrt{3-x}=2x-2 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Câu 3. (4,0 điểm)

1. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau được chọn từ các số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 ; 8; 9. Xác định số phần tử của S. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn là số chẵn.

2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(0;9)$, $B(3;6)$. Gọi D là miền nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x-y+a\le 0 \\ 6x+3y+5a\ge 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của a để $AB\subset D$.

Câu 4 . (4,0 điểm)

1. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên các đoạn thẳng lần lượt lấy các điểm A',B',C' khác với S. Chứng minh rằng: $\dfrac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}}=\dfrac{SA}{SA'}.\dfrac{SB}{SB'}.\dfrac{SC}{SC'}$

2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có $AB = a, SA = a\sqrt{3}$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, gọi G là trọng tâm tam giác SCD.

a) Tính thể tích khối chóp $S.OGC$.

b) Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC).

c) Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SA và BG.

Câu 5. (2,0 điểm)

1. Cho phương trình $(m+2)\sqrt{x(x^2+1)} - x^2 + (m-6)x - 1 = 0$ (1). Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm thực.

2. Cho đa thức $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$ có nghiệm thực. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 - 4b + 1 > 0$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (6,0 điểm)

1. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-2}$ (C) và đường thẳng $d: x - y - 1 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đó song song với d.

2. Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2-1)x + m + 2$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Lời giải

Tác giả: Lê Hoàn; Fb: Lê Hoàn

1. $d: x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow d: y = x - 1 \Rightarrow d$ có hệ số góc $k_d = 1$.

Xét hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-2}$ có:

+ Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

+ $y' = \dfrac{1}{(x-1)^2}$, $\forall x \neq 1$.

Gọi đường thẳng Δ là tiếp tuyến của (C) tại điểm $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-3}{x_0-1}\right)$ (với $x_0\neq 1$).

Δ có hệ số góc là $k_\Delta=\dfrac{1}{(x_0-1)^2}$ và phương trình $\Delta: y=\dfrac{1}{(x_0-1)^2}.x-\dfrac{x_0}{(x_0-1)^2}+\dfrac{2x_0-3}{x_0-1}$.

+ Giả sử $\Delta//d$ ta được $k_\Delta=k_d\Leftrightarrow\dfrac{1}{(x_0-1)^2}=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=2\end{array}\right.$.

+ Thử lại:

- $x_0=0\Rightarrow\Delta: y=x+3$ thỏa mãn $\Delta//d$.
- $x_0=2\Rightarrow\Delta: y=x-1\Rightarrow\Delta\equiv d$ không thỏa mãn.

Vậy tiếp tuyến cần tìm là $\Delta: y=x+3$.

2. $y'=3x^2-6mx+3(m^2-1),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m-1\\x=m+1\end{array}\right.$ (Hai nghiệm phân biệt với mọi m)

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$m-1$		$m+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	y_1	$\searrow$	y_2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)\Leftrightarrow(2;+\infty)\subset(m+1;+\infty)\Leftrightarrow m+1\leq 2\Leftrightarrow m\leq 1$.

Vậy giá trị của m cần tìm là: $m\leq 1$.

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{2\sin^2 x}{\sin^4\dfrac{x}{2}+\cos^4\dfrac{x}{2}}$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3-y^3-3(2x^2-y^2+2y)+15x-10=0\\ \sqrt{2-y}+\sqrt{3-x}=2x-2\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải

1. Ta có $\sin^4\frac{x}{2}+\cos^4\frac{x}{2}=1-2\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=1-\frac{1}{2}\sin^2 x=\frac{2-\sin^2 x}{2}\neq 0,\forall x$

Khi đó $f(x)=\frac{4\sin^2 x}{2-\sin^2 x}=\frac{8}{2-\sin^2 x}-4$.

Vì $0\le\sin^2 x\le 1\Rightarrow 1\le 2-\sin^2 x\le 2$ nên $4\le\frac{8}{2-\sin^2 x}\le 8$. Do đó $0\le f(x)\le 4$.

Ta có $f(x)=0\Leftrightarrow\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$,

$f(x)=4\Leftrightarrow\sin^2 x=1\Leftrightarrow\sin x=\pm 1\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là 0 đạt được khi $x=k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$, giá trị lớn nhất của $f(x)$ là 4 đạt được khi $x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

2. Điều kiện: $\begin{cases}x\le 3\\ y\le 2\end{cases}$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$\left(x-2\right)^3+3\left(x-2\right)=\left(y-1\right)^3+3\left(y-1\right)\qquad(1)$

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t,\left(t\in\mathbb{R}\right)$.

Khi đó ta có $f'\left(t\right)=3t^2+3>0,\forall t\in\mathbb{R}$. Do đó $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nên phương trình (1) trở thành $f\left(x-2\right)=f\left(y-1\right)\Leftrightarrow x-2=y-1\Leftrightarrow y=x-1$.

Thay $y=x-1$ vào phương trình thứ hai ta được:

$2\sqrt{3-x}=2x-2\Leftrightarrow\sqrt{3-x}=x-1$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ 3-x=x^2-2x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=2$.

Với $x=2$ thì $y=1$ (thỏa mãn).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=(2;1)$.

Câu 3.(4,0 điểm)

1. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau được chọn từ các số 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9. Xác định số phần tử của S. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn là số chẵn.

2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(0;9)$, $B(3;6)$. Gọi D là miền nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}2x-y+a\le 0\\6x+3y+5a\ge 0\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của a để $AB\subset D$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thanh Việt ; Fb: Nguyễn Thanh Việt

1. Số phần tử của tập S là $n(S)=9.9.8.7.6=27216$.

Gọi số chẵn thuộc tập S có dạng $\overline{abcde}(a\ne 0)$.

Nếu $e\in\{2;4;6;8\}$, trường hợp này ta có: $8.8.7.6.4=10752$ số.

Nếu $e=0$, trường hợp này ta có: $9.8.7.6=3024$ số.

Vậy xác suất cần tìm là: $P=\dfrac{10752+3024}{27216}=\dfrac{13776}{27216}=\dfrac{41}{81}$.

2. Phương trình đường thẳng $AB: x+y-9=0$.

Trường hợp 1: Nếu AB là đường thẳng.

Xét hệ $\begin{cases}a\le -2x+y\\5a\ge -6x-3y\end{cases}$.

Dễ thấy điểm $C(7;2)\in AB$ nhưng $C\notin D$ vì $\begin{cases}a\le -12\\5a\ge -48\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\le -12\\a\ge \dfrac{-48}{5}\end{cases}\Leftrightarrow a\in\varnothing$.

Trường hợp 2: Nếu AB là đoạn thẳng. Ta thay $y=9-x\left(x\in[0;3]\right)$ vào hệ $\begin{cases}a\le -2x+y\\5a\ge -6x-3y\end{cases}$

Ta được: $\begin{cases}a\le 9-3x\\a\ge \dfrac{-3x-27}{5}\end{cases}\Rightarrow \dfrac{-3x-27}{5}\le a\le 9-3x$ (*)

(*) đúng $\forall x \in [0;3] \Leftrightarrow -\frac{27}{5} \le a \le 0$.

Vậy $-\frac{27}{5} \le a \le 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4 . (4,0 điểm)

1. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên các đoạn thẳng lần lượt lấy các điểm A', B', C' khác với S. Chứng minh rằng: $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}} = \frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}$

2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có $AB = a, SA = a\sqrt{3}$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, gọi G là trọng tâm tam giác SCD.

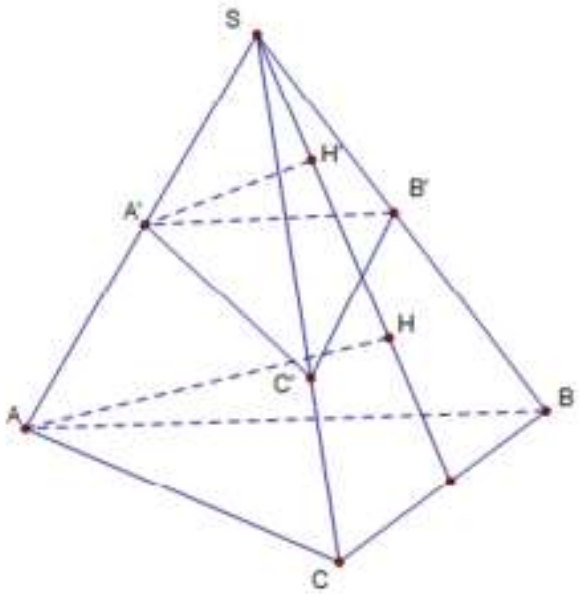
a) Tính thể tích khối chóp $S.OGC$.

b) Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC).

c) Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SA và BG.

Lời giải

1.



Gọi H, H' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, A' trên (SBC).

Ta có $\frac{AH}{AH'} = \frac{SA}{SA'}$

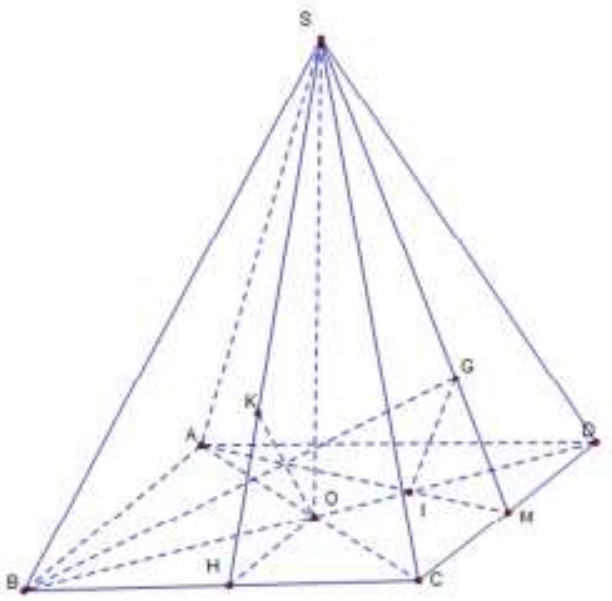
$S_{SBC} = \frac{1}{2}SB.SC.\sin BSC; S_{SB'C'} = \frac{1}{2}SB'.SC'.\sin BSC$

Khi đó $V_{S.ABC} = V_{A.SBC} = \frac{1}{3}AH.S_{SBC} = \frac{1}{6}AH.SB.SC.\sin BSC$

$V_{S.A'B'C'} = V_{A'.SB'C'} = \frac{1}{3}A'H'.S_{SB'C'} = \frac{1}{6}A'H'.SB'.SC'.\sin BSC$

Vậy $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}} = \frac{AH}{A'H'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'} = \frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}$

2.



a) Ta có $AC = a\sqrt{2}; SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$

Gọi M là trung điểm của CD

Khi đó $V_{S.OCM} = \frac{1}{6}SO.OM.MC = \frac{a^3\sqrt{10}}{48}$

$\frac{V_{S.OCG}}{V_{S.OCM}} = \frac{SG}{SM} = \frac{2}{3}$

Suy ra $V_{S.OGC} = \frac{2}{3}V_{S.OMC} = \frac{a^3\sqrt{10}}{72}$.

b) Ta có $d(G,(SBC)) = \frac{2}{3}d(M,(SBC)) = \frac{2}{3}d(O,(SBC))$

Gọi H là trung điểm BC, K là hình chiếu vuông góc của O trên SH.

Ta có $\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OH^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{4}{10a^2} = \frac{22}{5a^2}$

$d(O;(\text{SBC})) = \text{OK} = \dfrac{a\sqrt{10}}{22}$

$d(G,(SBC)) = \dfrac{2}{3}d(O,(SBC)) = \dfrac{a\sqrt{110}}{33}$

c) Gọi I là giao của BD và AM, I là trọng tâm tam giác ADC.

Suy ra $IG//SA$ nên góc giữa hai đường thẳng SA, BG bằng góc giữa hai đường thẳng IG, BG

Ta có $IG = \dfrac{1}{3}SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}; BI = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}; BG = \dfrac{a\sqrt{11}}{3}$

$\cos IGB = \dfrac{BG^2 + IG^2 - BI^2}{2.BG.IG} = \dfrac{\sqrt{33}}{11}$.

Câu 5. (2,0 điểm)

1. Cho phương trình $(m+2)\sqrt{x(x^2+1)} - x^2 + (m-6)x - 1 = 0$ (1). Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm thực.

2. Cho đa thức $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$ có nghiệm thực. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 - 4b + 1 > 0$.

Lời giải

Tác giả: Minh Hạnh; Fb: fb.com/meocon2809

Câu 5.1.

Điều kiện: $x \ge 0$.

- Với $x = 0$ thì phương trình vô nghiệm.

- Với $x > 0$, Phương trình $(1) \Leftrightarrow (m+2)\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}} - \dfrac{x^2+1}{x} + m - 6 = 0$.

Đặt $t = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}} \Rightarrow \begin{cases} t \ge \sqrt{2} \\ t^2 = \dfrac{x^2+1}{x} \end{cases}$;

Ta được phương trình mới theo ẩn phụ:

$(m+2)t - t^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{t^2 - 2t + 6}{t+1} = m$ (2).

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2-2t+6}{t+1}\Rightarrow f'(t)=\dfrac{t^2+2t-8}{(t+1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-4\ (l)\\ t=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-4		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
y'		+	0	-		-	0	+	
y					$2\sqrt{2}-2$	↘	2	↗	$+\infty$

Nhìn bảng biến thiên ta thấy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m\ge 2$.

Câu 5.2

Giả sử đa thức đã cho có nghiệm trong trường hợp $a^2+b^2-4b+1\le 0$.

Ta có: $a^2+b^2-4b+1\le 0\Leftrightarrow a^2+(b-2)^2\le 3\ (1)$.

Vì $x=0$ không là nghiệm của phương trình $f(x)=0$ nên:

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0\Leftrightarrow\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+a\left(x+\frac{1}{x}\right)+b=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+a\left(x+\frac{1}{x}\right)+b-2=0$$

Đặt $t=x+\dfrac{1}{x}$ thì phương trình trên có nghiệm khi và chỉ khi $t^2+at+b-2=0$ có nghiệm thỏa mãn $|t|\ge 2$.

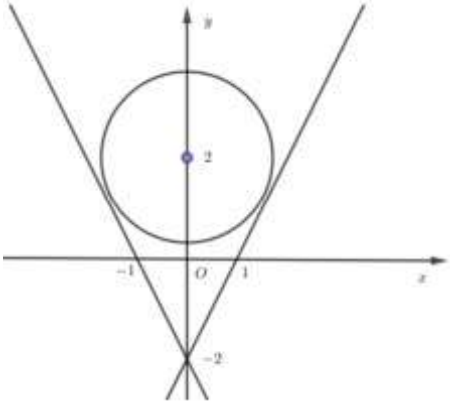
Xét hàm số $g(t)=t^2+at+b-2$

Ta có: $g'(t)=2t+a, g'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{-a}{2}$. Như (1) trên thì $\dfrac{-a}{2}\notin(-2;2)$

Do đó ta có bảng biến thiên

t	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(t)$		-				+	
$g(t)$	$+\infty$	↘	$-2a+b+2$		$2a+b+2$	↗	$+\infty$

Phương trình có nghiệm thì $\begin{cases}-2a+b+2\le 0 & (2)\\ 2a+b+2\le 0 & (3)\end{cases}$



Những điểm $M(a;b)$ thoả (1) thì nằm bên trong hoặc biên đường tròn tâm $I(0;2)$ và bán kính bằng $\sqrt{3}$.

Những điểm $N(a;b)$ thoả mãn (2) và (3) là những điểm thuộc phần không chứa gốc tạo độ của các đường thẳng $\left[\begin{array}{l}-2x+y+2=0\\2x+y+2=0\end{array}\right.$

Những phần đó theo hình vẽ là không có điểm chung, vì vậy ta có mâu thuẫn.

Ta có điều phải chứng minh: Nếu đa thức đã cho có nghiệm thì $a^2+b^2-4b+1>0$

Chú ý: Bài có thể giải nhanh như sau:

$$t^2+at+b-2=0 \Leftrightarrow t^2=-at+2-b \Rightarrow t^4=(-at+2-b)^2 \le \left[a^2+(b-2)^2\right]\left(1+t^2\right)$$

$$\Rightarrow a^2+(b-2)^2 > \frac{t^4-1}{t^2+1}=t^2-1\ge 3 \Rightarrow a^2+b^2-4b+1>0$$

---HẾT---

ĐỀ HSG LỚP 12 VÒNG 2
TỈNH BÌNH THUẬN
MÔN TOÁN
TIME: 180 PHÚT

ĐỀ.

Câu 1: Giải phương trình nghiệm nguyên $x^3+y^3+x^2y+xy^2=4(x^2+xy+y^2)+1$.

Câu 2: Cho $x,y\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sin^2 x\sin^2 y+1}+\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 y+1}+\frac{1}{\cos^2 x+1}\le\frac{9}{2\left(\sin^2 x\sin 2y+\sin 2x\sin y+\sin 2x\cos y\right)}.$$

Câu 3: Cho tam giác ABC có $AB<AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Phân giác trong góc BAC cắt (O) tại điểm D khác A, lấy E đối xứng B qua AD, đường thẳng BE cắt (O) tại F khác B. Lấy điểm G di chuyển trên cạnh AC (G khác A,C), đường thẳng BG cắt (O) tại H khác B. Đường thẳng qua C song song AH cắt FD tại I. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCG cắt EI tại hai điểm phân biệt K,L. Chứng minh rằng đường trung trực đoạn thẳng KL luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 4: Cho 2018 tập hợp mà mỗi tập chứa đúng 45 phàn tử. Biết rằng hai tập hợp tùy ý trong các tập này đều có đúng một phần tử chung. Chứng minh rằng tồn tại một phần tử thuộc tất cả 2018 tập hợp đã cho.

……HẾT…..

GIẢI CHI TIẾT ĐỀ HSG LỚP 12
VÒNG 2
TỈNH BÌNH THUẬN
MÔN TOÁN
TIME: PHÚT

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1: Giải phương trình nghiệm nguyên $x^3+y^3+x^2y+xy^2=4(x^2+xy+y^2)+1$.

Lời giải

Tác giả:Nguyễn Ngọc Như Trang; Fb:nhutrangnguyenngoc

Nhận xét: $x\neq y$

$\Rightarrow 2(x^2+y^2)>|4xy+1|$

$x^3+y^3+x^2y+xy^2=4(x^2+xy+y^2)+1\Leftrightarrow (x^2+y^2)(x+y-4)=4xy+1$

$\Rightarrow 2|4xy+1|=\left|2\left(x^2+y^2\right)\left(x+y-4\right)\right|>|4xy+1||x+y-4|$

$\Rightarrow 2>|x+y-4|\Rightarrow x+y=3\vee x+y=4\vee x+y=5$

$x+y=3$ không thỏa.

$x+y=4$ không thỏa.

$x+y=5$ tìm được $x=1;y=4$ hoặc $x=4;y=1$

Câu 2: Cho $x,y\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sin^2x\sin^2y+1}+\frac{1}{\sin^2x\cos^2y+1}+\frac{1}{\cos^2x+1}\leq\frac{9}{2\left(\sin^2x\sin2y+\sin2x\sin y+\sin2x\cos y\right)}.$$

Lời giải

Tác giả:Trần Viết Tường; Fb:Trần Tường

Đặt $a=\sin x\sin y,b=\sin x\cos y,c=\cos x$ thì $a,b,c>0$ và $a^2+b^2+c^2=1$.

Ta cần chứng minh $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\leq\frac{9}{4\left(ab+ac+bc\right)}$.

Thật vậy, $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\le\frac{1}{(a+b)(a+c)}+\frac{1}{(b+c)(b+a)}+\frac{1}{(c+a)(c+b)}=$

$\frac{2(a+b+c)}{(a+b)(a+c)(b+c)}$

Mà

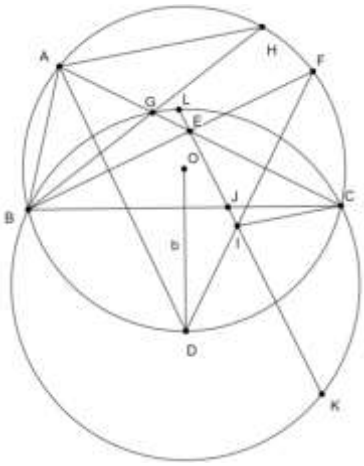
$$(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$$
$$\ge(a+b+c)(ab+bc+ca)-\frac{1}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)=\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Nên $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\le\frac{9}{4(ab+bc+ca)}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow x=\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}, y=\frac{\pi}{4}$

Câu 3: Cho tam giác ABC có $AB<AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Phân giác trong góc BAC cắt (O) tại điểm D khác A, lấy E đối xứng B qua AD, đường thẳng BE cắt (O) tại F khác B. Lấy điểm G di chuyển trên cạnh AC (G khác A,C), đường thẳng BG cắt (O) tại H khác B. Đường thẳng qua C song song AH cắt FD tại I. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCG cắt EI tại hai điểm phân biệt K,L. Chứng minh rằng đường trung trực đoạn thẳng KL luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



Gọi giao điểm của đường thẳng EI và BC là J. Ta có DF là trục đối xứng của EC $CEJ=ECI=HAC=HBC$ nên tứ giác $BGEJ$ nội tiếp.

Phép nghịch đảo $N_C^{k=CE.CG=CJ.CB}$ biến đường tròn (BCG) thành đường thẳng EJ nên biến K,L thành chính nó.

Do đó $CK^2 = CL^2 = k$ hay đường trung trực đoạn thẳng KL luôn đi qua điểm C cố định.

Câu 4: Cho 2018 tập hợp mà mỗi tập chứa đúng 45 phàn tử. Biết rằng hai tập hợp tùy ý trong các tập này đều có đúng một phần tử chung. Chứng minh rằng tồn tại một phần tử thuộc tất cả 2018 tập hợp đã cho.

Giải

Lấy tập A tùy ý, trong A sẽ có phần tử a thuộc ít nhất 45 tập hợp khác. Nếu không, số tập hợp không quá $45.44+1=1981$. Suy ra a thuộc 46 tập $A, A_1, A_2, ...A_{45}$.

Với tập B bất kì, nếu a không thuộc tập B thì mỗi tập A_i $(1 \le i \le 45)$ đều có phần tử a_i chung với B mà $a_i \ne a$.

Thành ra B không có phần tử chung với A, nếu có thì phần tử chung đó phải thuộc tập A_i $(1 \le i \le 45)$ nào đó nên A và A_i $(1 \le i \le 45)$ có hai phần tử chung.(Vô lí)

Nên a thuộc B, do đó a thuộc 2018 tập đã cho.

ĐỀ HSG LỚP 12 VÒNG 2
TỈNH BÌNH THUẬN
MÔN TOÁN
TIME: 180 PHÚT

ĐỀ.

Câu 5: Giải phương trình nghiệm nguyên $x^3+y^3+x^2y+xy^2=4(x^2+xy+y^2)+1$.

Câu 6: Cho $x,y\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sin^2 x\sin^2 y+1}+\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 y+1}+\frac{1}{\cos^2 x+1}\le\frac{9}{2\left(\sin^2 x\sin 2y+\sin 2x\sin y+\sin 2x\cos y\right)}.$$

Câu 7: Cho tam giác ABC có $AB<AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Phân giác trong góc BAC cắt (O) tại điểm D khác A, lấy E đối xứng B qua AD, đường thẳng BE cắt (O) tại F khác B. Lấy điểm G di chuyển trên cạnh AC (G khác A,C), đường thẳng BG cắt (O) tại H khác B. Đường thẳng qua C song song AH cắt FD tại I. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCG cắt EI tại hai điểm phân biệt K,L. Chứng minh rằng đường trung trực đoạn thẳng KL luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 8: Cho 2018 tập hợp mà mỗi tập chứa đúng 45 phàn tử. Biết rằng hai tập hợp tùy ý trong các tập này đều có đúng một phần tử chung. Chứng minh rằng tồn tại một phần tử thuộc tất cả 2018 tập hợp đã cho.

……HẾT…..

GIẢI CHI TIẾT ĐỀ HSG LỚP 12
VÒNG 2
TỈNH BÌNH THUẬN
MÔN TOÁN
TIME: PHÚT

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 5: Giải phương trình nghiệm nguyên $x^3+y^3+x^2y+xy^2=4(x^2+xy+y^2)+1$.

Lời giải

Tác giả:Nguyễn Ngọc Như Trang; Fb:nhutrangnguyenngoc

Nhận xét: $x\neq y$

$\Rightarrow 2(x^2+y^2)>|4xy+1|$

$x^3+y^3+x^2y+xy^2=4(x^2+xy+y^2)+1\Leftrightarrow (x^2+y^2)(x+y-4)=4xy+1$

$\Rightarrow 2|4xy+1|=\left|2\left(x^2+y^2\right)\left(x+y-4\right)\right|>|4xy+1||x+y-4|$

$\Rightarrow 2>|x+y-4|\Rightarrow x+y=3\vee x+y=4\vee x+y=5$

$x+y=3$ không thỏa.

$x+y=4$ không thỏa.

$x+y=5$ tìm được $x=1;y=4$ hoặc $x=4;y=1$

Câu 6: Cho $x,y\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sin^2x\sin^2y+1}+\frac{1}{\sin^2x\cos^2y+1}+\frac{1}{\cos^2x+1}\leq\frac{9}{2\left(\sin^2x\sin2y+\sin2x\sin y+\sin2x\cos y\right)}.$$

Lời giải

Tác giả:Trần Viết Tường; Fb:Trần Tường

Đặt $a=\sin x\sin y,b=\sin x\cos y,c=\cos x$ thì $a,b,c>0$ và $a^2+b^2+c^2=1$.

Ta cần chứng minh $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\leq\frac{9}{4\left(ab+ac+bc\right)}$.

Thật vậy, $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\le\frac{1}{(a+b)(a+c)}+\frac{1}{(b+c)(b+a)}+\frac{1}{(c+a)(c+b)}=$

$\frac{2(a+b+c)}{(a+b)(a+c)(b+c)}$

Mà

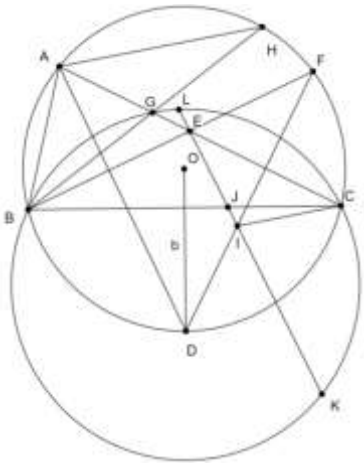
$$(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$$
$$\ge(a+b+c)(ab+bc+ca)-\frac{1}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)=\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Nên $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\le\frac{9}{4(ab+bc+ca)}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow x=\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}, y=\frac{\pi}{4}$

Câu 7: Cho tam giác ABC có $AB<AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Phân giác trong góc BAC cắt (O) tại điểm D khác A, lấy E đối xứng B qua AD, đường thẳng BE cắt (O) tại F khác B. Lấy điểm G di chuyển trên cạnh AC (G khác A,C), đường thẳng BG cắt (O) tại H khác B. Đường thẳng qua C song song AH cắt FD tại I. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCG cắt EI tại hai điểm phân biệt K,L. Chứng minh rằng đường trung trực đoạn thẳng KL luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



Gọi giao điểm của đường thẳng EI và BC là J. Ta có DF là trục đối xứng của EC $CEJ=ECI=HAC=HBC$ nên tứ giác $BGEJ$ nội tiếp.

Phép nghịch đảo $N_C^{k=CE.CG=CJ.CB}$ biến đường tròn (BCG) thành đường thẳng EJ nên biến K,L thành chính nó.

Do đó $CK^2 = CL^2 = k$ hay đường trung trực đoạn thẳng KL luôn đi qua điểm C cố định.

Câu 8: Cho 2018 tập hợp mà mỗi tập chứa đúng 45 phàn tử. Biết rằng hai tập hợp tùy ý trong các tập này đều có đúng một phần tử chung. Chứng minh rằng tồn tại một phần tử thuộc tất cả 2018 tập hợp đã cho.

Giải

Lấy tập A tùy ý, trong A sẽ có phần tử a thuộc ít nhất 45 tập hợp khác. Nếu không, số tập hợp không quá $45.44+1=1981$. Suy ra a thuộc 46 tập $A, A_1, A_2, ...A_{45}$.

Với tập B bất kì, nếu a không thuộc tập B thì mỗi tập A_i $(1 \le i \le 45)$ đều có phần tử a_i chung với B mà $a_i \ne a$.

Thành ra B không có phần tử chung với A, nếu có thì phần tử chung đó phải thuộc tập A_i $(1 \le i \le 45)$ nào đó nên A và A_i $(1 \le i \le 45)$ có hai phần tử chung.(Vô lí)

Nên a thuộc B, do đó a thuộc 2018 tập đã cho.

ĐỀ HSG LỚP 12
TỈNH THỪA THIÊN HUẾ
MÔN TOÁN
TIME: 180 PHÚT

ĐỀ

Câu 1. (4,0 điểm) Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị (C). Tiếp tuyến tại M của đồ thị (C) cắt hai đường tiệm cận của đồ thị (C) lần lượt tại hai điểm A và B.

a) Chứng minh M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

b) Xác định tọa độ điểm M để chu vi tam giác IAB nhỏ nhất.

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình $2\sqrt{2}\cos 2x-\sin 2x\cos\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right)-4\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0\ \ (x\in\mathbb{R})$.

b) Giải phương trình $2x+3+(x+1)\sqrt{x^2+6}+(x+2)\sqrt{x^2+2x+9}=0\ \ (x\in\mathbb{R})$.

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3-3x^2+4x-y-2=0 \\ \sqrt{2x+y+5}-\sqrt{3-x-y}=x^3-3x^2-10y-10 \end{cases}\ (x,y\in\mathbb{R})$

b) Cho tập $A=\{0;1;2;3;4;5;6\}$. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được chọn từ các phần tử của tập A. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 15.

Câu 4. (3,0 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $\Delta: 5x-2y-19=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-2y=0$. Từ 1 điểm M nằm trên đường thẳng Δ kẻ 2 tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) với A, B là 2 tiếp điểm. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB biết $AB=\sqrt{10}$.

Câu 5 . (3,0 điểm) Cho tam giác đều OAB có $AB=a$. Trên đường thẳng (d) đi qua O vuông góc với mặt phẳng (OAB) lấy một điểm M sao cho $OM=x$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên MB và OB. Đường thẳng EF cắt đường thẳng (d) tại N.

a) Chứng minh rằng $AN\perp BN$.

b) Xác định x theo a để thể tích khối tứ diện $ABMN$ nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất đó.

Câu 6. (2,0 điểm) Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2018$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}+\frac{3029}{2}$.

HẾT

GIẢI CHI TIẾT ĐỀ HSG LỚP 12 TỈNH THỪA THIÊN HUẾ MÔN TOÁN TIME: 180 PHÚT

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. (4,0 điểm) Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị (C). Tiếp tuyến tại M của đồ thị (C) cắt hai đường tiệm cận của đồ thị (C) lần lượt tại hai điểm A và B.

a) Chứng minh M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

b) Xác định tọa độ điểm M để chu vi tam giác IAB nhỏ nhất.

Lời giải

Tác giả:Huỳnh Trọng Nghĩa; Fb: Huỳnh Trọng Nghĩa

a) Ta có: $y'=-\frac{1}{(x-1)^2}$. Gọi $M\left(a;\frac{2a-1}{a-1}\right)(a\neq 1)$ là tiếp điểm

Phương trình tiếp tuyến d của đồ thị (C) tại điểm M là:

$$y=-\frac{1}{(a-1)^2}(x-a)+\frac{2a-1}{a-1}$$

Giả sử A, B lần lượt là giao điểm của d với đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

Suy ra: $A\left(1;\dfrac{2a}{a-1}\right), B\left(2a-1;2\right)$

Khi đó: $\begin{cases} x_A + x_B = 1+(2a-1) = 2a = 2x_M \\ y_A + y_B = \dfrac{2a}{a-1}+2 = \dfrac{4a-2}{a-1} = 2y_M \end{cases} \Rightarrow M$ là trung điểm của đoạn thẳng AB.

b) Ta có $IA = \dfrac{2}{|a-1|}; IB = 2|a-1| \Rightarrow IA.IB = 4$

Tam giác IAB vuông tại I nên:

$IA + IB + AB = IA + IB + \sqrt{IA^2 + IB^2} \geq 2\sqrt{IA.IB} + \sqrt{2IA.IB} = 4 + 2\sqrt{2}$

Vậy chu vi tam giác IAB nhỏ nhất bằng $4+2\sqrt{2}$ khi và chỉ khi:

$IA = IB \Leftrightarrow \dfrac{2}{|a-1|} = 2|a-1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \Rightarrow M\ (0;1) \\ a=2 \Rightarrow M\ (2;3) \end{array}\right.$

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình $2\sqrt{2}\cos 2x - \sin 2x \cos\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right) - 4\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = 0\ \ (x\in\mathbb{R})$.

b) Giải phương trình $2x+3+(x+1)\sqrt{x^2+6}+(x+2)\sqrt{x^2+2x+9}=0\ \ (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải

a) Phương trình tương đương với:

$$2\sqrt{2}(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - \sin 2x\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) - 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) + \sin 2x(\cos x + \sin x) - 4(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x + \sin x = 0\ \ (1) \\ 4(\cos x - \sin x) + \sin 2x - 4 = 0\ \ (2) \end{array}\right.$$

Ta có $(1) \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$

Giải (2): Đặt $t = \cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right] \Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$

Phương trình trở thành: $4t + 1 - t^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=3\ \ (loại) \end{array}\right.$

Với $t=1$ ta có $\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \ (k\in\mathbb{Z})$

Vậy phương trình ban đầu có ba họ nghiệm là $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$; $x=k2\pi$; $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

b) Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x^2+2x+9}>0 \\ v=\sqrt{x^2+6}>0 \end{cases}$

$\Rightarrow u^2-v^2=2x+3 \Leftrightarrow x=\frac{u^2-v^2-3}{2}$

Phương trình đã cho trở thành: $u^2-v^2+v.\left(\frac{u^2-v^2-1}{2}\right)+u.\left(\frac{u^2-v^2+1}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\left(u^2-v^2\right)+(u+v)\left(u^2-v^2\right)+(u-v)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u-v=0 \\ 2(u+v)+(u+v)^2+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u+v=-1\ (vn) \end{array}\right.$

Với $u=v$ ta có $\sqrt{x^2+6}=\sqrt{x^2+2x+9} \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm là $x=-\frac{3}{2}$.

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3-3x^2+4x-y-2=0 \\ \sqrt{2x+y+5}-\sqrt{3-x-y}=x^3-3x^2-10y-10 \end{cases} \ (x,y\in\mathbb{R})$

b) Cho tập $A=\{0;1;2;3;4;5;6\}$. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được chọn từ các phần tử của tập A. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 15.

Lời giải

a) Điều kiện $\begin{cases} 2x+y+5\ge 0 \\ 3-x-y\ge 0 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương: $(x-1)^3+(x-1)=y^3+y$

$\Leftrightarrow (x-y-1)\left[(x-1)^2+y(x-1)+y^2+1\right]=0$

$\Leftrightarrow y = x - 1$

Thay $y = x - 1$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được phương trình:

$\sqrt{3x+4} - \sqrt{4-2x} = x^3 - 3x^2 - 10x$

$\Leftrightarrow \dfrac{5x}{\sqrt{3x+4} + \sqrt{4-2x}} = x(x-5)(x+2)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ (x-5)(x+2)\left(\sqrt{3x+4} + \sqrt{4-2x}\right) = 5 \quad (*) \end{array}\right.$

Với $x = 0 \Rightarrow y = -1$.

Do $-\dfrac{4}{3} \le x \le 2$ nên $VT(*) < 0$ nên phương trình $(*)$ vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ là $(0; -1)$.

b) Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ là số tự nhiên cần tìm, trong đó các chữ số lấy từ tập A.

Số phần tử của tập S là số các số tự nhiên có 5 chữ số với các chữ số khác nhau lấy từ tập A.

Ta có $n(S) = 6A_6^4 = 2160$.

Do n chia hết cho 15 nên n chia hết cho 3 và 5. Suy ra $a_5 = 0$ hoặc $a_5 = 5$.

TH1: $a_5 = 0 \Rightarrow n = \overline{a_1a_2a_3a_40}$ trong đó 4 số a_1, a_2, a_3, a_4 lấy từ tập $\{1;2;3;4;5;6\}$.

Khi đó để n chia hết cho 3 thì $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ chia hết cho 3

Do 4 số a_1, a_2, a_3, a_4 lấy từ tập $\{1;2;3;4;5;6\}$ nên xảy ra 2 TH sau:

i) Trong 4 số đó gồm hai số chia hết cho 3, một số chia 3 dư 1, một số chia 3 dư 2.

Có tất cả $A_4^2.2.2.2 = 96$ số.

ii) Trong 4 số đó gồm hai số chia 3 dư 1, hai số chia 3 dư 2.

Có tất cả $4! = 24$ số.

TH2: $a_5 = 5 \Rightarrow n = \overline{a_1a_2a_3a_45}$ trong đó 4 số a_1, a_2, a_3, a_4 lấy từ tập $\{0;1;2;3;4;6\}$.

Khi đó để n chia hết cho 3 thì $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ chia 3 dư 1.

Do 4 số a_1, a_2, a_3, a_4 lấy từ tập $\{0;1;2;3;4;6\}$ nên xảy ra 2 TH sau:

iii) Trong 4 số đó gồm ba số chia hết cho 3, một số chia 3 dư 1.

* Nếu $a_1 = 3$ thì a_2, a_3, a_4 là các số trong bộ ba số $\{0;6;1\}$, $\{0;6;4\}$ nên có $3!+3!=12$ số.

* Nếu $a_1 = 6$ thì a_2, a_3, a_4 là các số trong bộ ba số $\{0;3;1\}$, $\{0;3;4\}$ nên có $3!+3!=12$ số.

* Nếu $a_1 = 1$ hoặc $a_1 = 4$ thì a_2, a_3, a_4 là các số trong bộ ba số $\{0;3;6\}$ nên có $3!+3!=12$ số.

Có tất cả 36 số.

iv) Trong 4 số đó gồm một số chia hết cho 3, hai số chia 3 dư 1, một số chia 3 dư 2

* Nếu $a_1 = 3$ hoặc $a_1 = 6$ thì a_2, a_3, a_4 là các số trong bộ ba số $\{1;2;4\}$ nên có $3!+3!=12$ số.

* Nếu $a_1 = 1$ thì a_2, a_3, a_4 là các số trong bộ ba số $\{2;4;6\}$, $\{2;4;3\}$, $\{2;4;0\}$ nên có $3.3!=18$ số.

* Nếu $a_1 = 2$ hoặc $a_1 = 4$ thì tương tự đều có 18 số thỏa mãn.

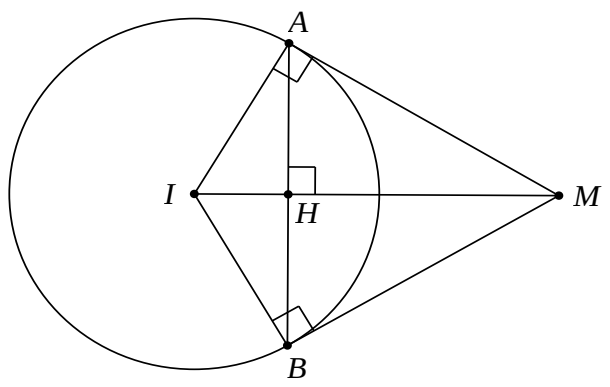
Có tất cả $12+18.3=66$ số.

Vậy xác suất cần tính là $\dfrac{96+24+36+66}{2160} = \dfrac{37}{360}$.

Câu 4. (3,0 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $\Delta: 5x-2y-19=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-2y=0$. Từ 1 điểm M nằm trên đường thẳng Δ kẻ 2 tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) với A, B là 2 tiếp điểm. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB biết $AB=\sqrt{10}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Huỳnh Như ; Fb: Nhu Nguyen



*Các tam giác IAM, IBM là các tam giác vuông nên đường tròn đường kính IM đi qua 2 điểm A, B nên đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB là đường tròn đường kính IM .

* Đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$ bán kính $R=\sqrt{5}$.

Ta có $IH=\sqrt{IA^2-AH^2}=\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}\Rightarrow IM=\frac{IA^2}{IH}=\sqrt{10}$.

Gọi $M\left(a;\frac{5a-19}{2}\right)\in\Delta$. Ta có $IM^2=10\Leftrightarrow(a-2)^2+\left(\frac{5a-19}{2}-1\right)^2=10$.

Giải phương trình ta được $\left[\begin{array}{l}a=3\\a=\frac{139}{29}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}M(3;-2)\\M\left(\frac{139}{29};\frac{72}{29}\right)\end{array}\right.$

*Với $M(3;-2)$ thì trung điểm IM là $\left(\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)$, phương trình đường tròn đường kính IM là

$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$.

* Với $M\left(\frac{139}{29};\frac{72}{29}\right)$ thì trung điểm IM là $\left(\frac{197}{58};\frac{37}{26}\right)$, phương trình đường tròn đường kính IM là $\left(x-\frac{197}{58}\right)^2+\left(y-\frac{37}{26}\right)^2=\frac{5}{2}$.

Câu 5 . (3,0 điểm) Cho tam giác đều OAB có $AB=a$. Trên đường thẳng (d) đi qua O vuông góc với mặt phẳng (OAB) lấy một điểm M sao cho $OM=x$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên MB và OB. Đường thẳng EF cắt đường thẳng (d) tại N.

a) Chứng minh rằng $AN\perp BN$.

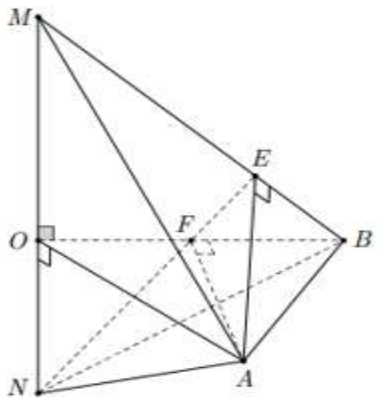
b) Xác định x theo a để thể tích khối tứ diện $ABMN$ nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải

Tác giả: Phan Trung Hiếu; Fb: Hieu Pt

a) Ta có $\begin{cases}AF\perp OB\\AF\perp OM\end{cases}\Rightarrow AF\perp(OMB)\Rightarrow AF\perp MB,$

mà $AE \perp MB$ nên $BM \perp (AEF)$.



Do $AN \subset (AEF)$ nên $AN \perp BM$.

b) Theo câu a) ta có

$$\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -OM.ON + OA.OB.\cos 60^0 = 0$$

$$\Leftrightarrow ON = \frac{OA.OB.\cos 60^0}{OM} = \frac{a^2}{2x}.$$

Do $MN \perp (OAB)$ nên

$$V_{ABMN} = V_{MOAB} + V_{NOAB} = \frac{1}{3}MN.S_{OAB} = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(x + \frac{a^2}{2x}\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}\left(x + \frac{a^2}{2x}\right).$$

Theo bất đẳng thức Cauchy thì $x + \frac{a^2}{2x} \geq 2\sqrt{x.\frac{a^2}{2x}} = \sqrt{2}a \Rightarrow V_{ABMN} \geq \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Vậy thể tích lớn nhất của khối tứ diện $ABMN$ là $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$ khi $x = \frac{a^2}{2x} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 6. (2,0 điểm)) Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2018$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} + \frac{3029}{2}$.

Lời giải

* Xét bất đẳng thức phụ: $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ với mọi $a, b > 0$.

* Dùng bất đẳng thức trên ta có:

$$\frac{1}{2x+y+z} = \frac{1}{(x+y)+(x+z)} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z}\right) \leq \frac{1}{16}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$$

Tương tự ta có: $\frac{1}{x+2y+z} \leq \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z}\right)$; $\frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z}\right)$

Suy ra: $P \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \frac{3029}{2} = \frac{2018}{4} + \frac{3029}{2} = 2019$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 2019 đạt được khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{3}{2018}$.

HẾT

ĐỀ HSG LỚP 12
TỈNH THỪA THIÊN HUẾ
MÔN TOÁN
TIME: 180 PHÚT

ĐỀ

Câu 1. (4,0 điểm) Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị (C). Tiếp tuyến tại M của đồ thị (C) cắt hai đường tiệm cận của đồ thị (C) lần lượt tại hai điểm A và B.

a) Chứng minh M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

b) Xác định tọa độ điểm M để chu vi tam giác IAB nhỏ nhất.

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình $2\sqrt{2}\cos 2x-\sin 2x\cos\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right)-4\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0\ \ (x\in\mathbb{R})$.

b) Giải phương trình $2x+3+(x+1)\sqrt{x^2+6}+(x+2)\sqrt{x^2+2x+9}=0\ \ (x\in\mathbb{R})$.

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3-3x^2+4x-y-2=0 \\ \sqrt{2x+y+5}-\sqrt{3-x-y}=x^3-3x^2-10y-10 \end{cases}\ (x,y\in\mathbb{R})$

b) Cho tập $A=\{0;1;2;3;4;5;6\}$. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được chọn từ các phần tử của tập A. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 15.

Câu 4. (3,0 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $\Delta: 5x-2y-19=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-2y=0$. Từ 1 điểm M nằm trên đường thẳng Δ kẻ 2 tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) với A, B là 2 tiếp điểm. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB biết $AB=\sqrt{10}$.

Câu 5 . (3,0 điểm) Cho tam giác đều OAB có $AB=a$. Trên đường thẳng (d) đi qua O vuông góc với mặt phẳng (OAB) lấy một điểm M sao cho $OM=x$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên MB và OB. Đường thẳng EF cắt đường thẳng (d) tại N.

a) Chứng minh rằng $AN\perp BN$.

b) Xác định x theo a để thể tích khối tứ diện $ABMN$ nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất đó.

Câu 6. (2,0 điểm) Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2018$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}+\frac{3029}{2}$.

HẾT

GIẢI CHI TIẾT ĐỀ HSG LỚP 12 TỈNH THỪA THIÊN HUẾ MÔN TOÁN TIME: 180 PHÚT

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. (4,0 điểm) Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị (C). Tiếp tuyến tại M của đồ thị (C) cắt hai đường tiệm cận của đồ thị (C) lần lượt tại hai điểm A và B.

a) Chứng minh M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

b) Xác định tọa độ điểm M để chu vi tam giác IAB nhỏ nhất.

Lời giải

Tác giả:Huỳnh Trọng Nghĩa; Fb: Huỳnh Trọng Nghĩa

a) Ta có: $y'=-\frac{1}{(x-1)^2}$. Gọi $M\left(a;\frac{2a-1}{a-1}\right)(a\neq 1)$ là tiếp điểm

Phương trình tiếp tuyến d của đồ thị (C) tại điểm M là:

$$y=-\frac{1}{(a-1)^2}(x-a)+\frac{2a-1}{a-1}$$

Giả sử A, B lần lượt là giao điểm của d với đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

Suy ra: $A\left(1;\frac{2a}{a-1}\right), B(2a-1;2)$

Khi đó: $\begin{cases} x_A + x_B = 1 + (2a-1) = 2a = 2x_M \\ y_A + y_B = \dfrac{2a}{a-1} + 2 = \dfrac{4a-2}{a-1} = 2y_M \end{cases} \Rightarrow M$ là trung điểm của đoạn thẳng AB.

b) Ta có $IA = \dfrac{2}{|a-1|}; IB = 2|a-1| \Rightarrow IA.IB = 4$

Tam giác IAB vuông tại I nên:

$$IA + IB + AB = IA + IB + \sqrt{IA^2 + IB^2} \geq 2\sqrt{IA.IB} + \sqrt{2IA.IB} = 4 + 2\sqrt{2}$$

Vậy chu vi tam giác IAB nhỏ nhất bằng $4 + 2\sqrt{2}$ khi và chỉ khi:

$$IA = IB \Leftrightarrow \frac{2}{|a-1|} = 2|a-1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \Rightarrow M\ (0;1) \\ a = 2 \Rightarrow M\ (2;3) \end{array}\right.$$

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình $2\sqrt{2}\cos 2x - \sin 2x \cos\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right) - 4\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0\ \ (x \in \mathbb{R})$.

b) Giải phương trình $2x + 3 + (x+1)\sqrt{x^2+6} + (x+2)\sqrt{x^2+2x+9} = 0\ \ (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải

a) Phương trình tương đương với:

$$2\sqrt{2}(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - \sin 2x\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) - 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) + \sin 2x(\cos x + \sin x) - 4(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x + \sin x = 0\ \ (1) \\ 4(\cos x - \sin x) + \sin 2x - 4 = 0\ \ (2) \end{array}\right.$$

Ta có $(1) \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\ \ (k \in \mathbb{Z})$

Giải (2): Đặt $t = \cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right] \Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$

Phương trình trở thành: $4t + 1 - t^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3\ \ (loại) \end{array}\right.$

Với $t=1$ ta có $\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \ (k\in\mathbb{Z})$

Vậy phương trình ban đầu có ba họ nghiệm là $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$; $x=k2\pi$; $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

b) Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x^2+2x+9}>0 \\ v=\sqrt{x^2+6}>0 \end{cases}$

$\Rightarrow u^2-v^2=2x+3 \Leftrightarrow x=\frac{u^2-v^2-3}{2}$

Phương trình đã cho trở thành: $u^2-v^2+v.\left(\frac{u^2-v^2-1}{2}\right)+u.\left(\frac{u^2-v^2+1}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\left(u^2-v^2\right)+(u+v)\left(u^2-v^2\right)+(u-v)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u-v=0 \\ 2(u+v)+(u+v)^2+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u+v=-1\ (vn) \end{array}\right.$

Với $u=v$ ta có $\sqrt{x^2+6}=\sqrt{x^2+2x+9} \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm là $x=-\frac{3}{2}$.

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3-3x^2+4x-y-2=0 \\ \sqrt{2x+y+5}-\sqrt{3-x-y}=x^3-3x^2-10y-10 \end{cases} \ (x,y\in\mathbb{R})$

b) Cho tập $A=\{0;1;2;3;4;5;6\}$. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được chọn từ các phần tử của tập A. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 15.

Lời giải

a) Điều kiện $\begin{cases} 2x+y+5\ge 0 \\ 3-x-y\ge 0 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương: $(x-1)^3+(x-1)=y^3+y$

$\Leftrightarrow (x-y-1)\left[(x-1)^2+y(x-1)+y^2+1\right]=0$

$\Leftrightarrow y = x - 1$

Thay $y = x - 1$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được phương trình:

$\sqrt{3x+4} - \sqrt{4-2x} = x^3 - 3x^2 - 10x$

$\Leftrightarrow \dfrac{5x}{\sqrt{3x+4} + \sqrt{4-2x}} = x(x-5)(x+2)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ (x-5)(x+2)\left(\sqrt{3x+4} + \sqrt{4-2x}\right) = 5 \quad (*) \end{array}\right.$

Với $x = 0 \Rightarrow y = -1$.

Do $-\dfrac{4}{3} \le x \le 2$ nên $VT(*) < 0$ nên phương trình $(*)$ vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ là $(0; -1)$.

b) Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ là số tự nhiên cần tìm, trong đó các chữ số lấy từ tập A.

Số phần tử của tập S là số các số tự nhiên có 5 chữ số với các chữ số khác nhau lấy từ tập A.

Ta có $n(S) = 6A_6^4 = 2160$.

Do n chia hết cho 15 nên n chia hết cho 3 và 5. Suy ra $a_5 = 0$ hoặc $a_5 = 5$.

TH1: $a_5 = 0 \Rightarrow n = \overline{a_1a_2a_3a_40}$ trong đó 4 số a_1, a_2, a_3, a_4 lấy từ tập $\{1;2;3;4;5;6\}$.

Khi đó để n chia hết cho 3 thì $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ chia hết cho 3

Do 4 số a_1, a_2, a_3, a_4 lấy từ tập $\{1;2;3;4;5;6\}$ nên xảy ra 2 TH sau:

i) Trong 4 số đó gồm hai số chia hết cho 3, một số chia 3 dư 1, một số chia 3 dư 2.

Có tất cả $A_4^2.2.2.2 = 96$ số.

ii) Trong 4 số đó gồm hai số chia 3 dư 1, hai số chia 3 dư 2.

Có tất cả $4! = 24$ số.

TH2: $a_5 = 5 \Rightarrow n = \overline{a_1a_2a_3a_45}$ trong đó 4 số a_1, a_2, a_3, a_4 lấy từ tập $\{0;1;2;3;4;6\}$.

Khi đó để n chia hết cho 3 thì $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ chia 3 dư 1.

Do 4 số a_1, a_2, a_3, a_4 lấy từ tập $\{0;1;2;3;4;6\}$ nên xảy ra 2 TH sau:

iii) Trong 4 số đó gồm ba số chia hết cho 3, một số chia 3 dư 1.

* Nếu $a_1 = 3$ thì a_2, a_3, a_4 là các số trong bộ ba số $\{0;6;1\}$, $\{0;6;4\}$ nên có $3!+3!=12$ số.

* Nếu $a_1 = 6$ thì a_2, a_3, a_4 là các số trong bộ ba số $\{0;3;1\}$, $\{0;3;4\}$ nên có $3!+3!=12$ số.

* Nếu $a_1 = 1$ hoặc $a_1 = 4$ thì a_2, a_3, a_4 là các số trong bộ ba số $\{0;3;6\}$ nên có $3!+3!=12$ số.

Có tất cả 36 số.

iv) Trong 4 số đó gồm một số chia hết cho 3, hai số chia 3 dư 1, một số chia 3 dư 2

* Nếu $a_1 = 3$ hoặc $a_1 = 6$ thì a_2, a_3, a_4 là các số trong bộ ba số $\{1;2;4\}$ nên có $3!+3!=12$ số.

* Nếu $a_1 = 1$ thì a_2, a_3, a_4 là các số trong bộ ba số $\{2;4;6\}$, $\{2;4;3\}$, $\{2;4;0\}$ nên có $3.3!=18$ số.

* Nếu $a_1 = 2$ hoặc $a_1 = 4$ thì tương tự đều có 18 số thỏa mãn.

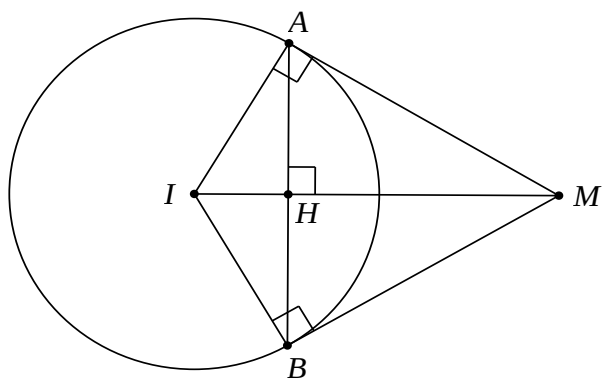
Có tất cả $12+18.3=66$ số.

Vậy xác suất cần tính là $\dfrac{96+24+36+66}{2160} = \dfrac{37}{360}$.

Câu 4. (3,0 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $\Delta: 5x-2y-19=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-2y=0$. Từ 1 điểm M nằm trên đường thẳng Δ kẻ 2 tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) với A, B là 2 tiếp điểm. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB biết $AB=\sqrt{10}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Huỳnh Như ; Fb: Nhu Nguyen



*Các tam giác IAM, IBM là các tam giác vuông nên đường tròn đường kính IM đi qua 2 điểm A, B nên đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB là đường tròn đường kính IM .

* Đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$ bán kính $R=\sqrt{5}$.

Ta có $IH=\sqrt{IA^2-AH^2}=\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}\Rightarrow IM=\frac{IA^2}{IH}=\sqrt{10}$.

Gọi $M\left(a;\frac{5a-19}{2}\right)\in\Delta$. Ta có $IM^2=10\Leftrightarrow(a-2)^2+\left(\frac{5a-19}{2}-1\right)^2=10$.

Giải phương trình ta được $\left[\begin{array}{l}a=3\\a=\frac{139}{29}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}M(3;-2)\\M\left(\frac{139}{29};\frac{72}{29}\right)\end{array}\right.$

*Với $M(3;-2)$ thì trung điểm IM là $\left(\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)$, phương trình đường tròn đường kính IM là

$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$.

* Với $M\left(\frac{139}{29};\frac{72}{29}\right)$ thì trung điểm IM là $\left(\frac{197}{58};\frac{37}{26}\right)$, phương trình đường tròn đường kính IM là $\left(x-\frac{197}{58}\right)^2+\left(y-\frac{37}{26}\right)^2=\frac{5}{2}$.

Câu 5 . (3,0 điểm) Cho tam giác đều OAB có $AB=a$. Trên đường thẳng (d) đi qua O vuông góc với mặt phẳng (OAB) lấy một điểm M sao cho $OM=x$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên MB và OB. Đường thẳng EF cắt đường thẳng (d) tại N.

a) Chứng minh rằng $AN\perp BN$.

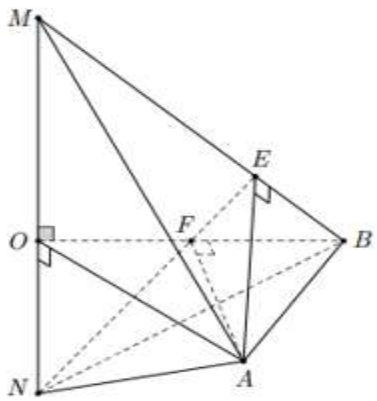
b) Xác định x theo a để thể tích khối tứ diện $ABMN$ nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải

Tác giả: Phan Trung Hiếu; Fb: Hieu Pt

a) Ta có $\begin{cases}AF\perp OB\\AF\perp OM\end{cases}\Rightarrow AF\perp(OMB)\Rightarrow AF\perp MB,$

mà $AE \perp MB$ nên $BM \perp (AEF)$.



Do $AN \subset (AEF)$ nên $AN \perp BM$.

b) Theo câu a) ta có

$$\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -OM.ON + OA.OB.\cos 60^0 = 0$$

$$\Leftrightarrow ON = \frac{OA.OB.\cos 60^0}{OM} = \frac{a^2}{2x}.$$

Do $MN \perp (OAB)$ nên

$$V_{ABMN} = V_{MOAB} + V_{NOAB} = \frac{1}{3}MN.S_{OAB} = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(x + \frac{a^2}{2x}\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}\left(x + \frac{a^2}{2x}\right).$$

Theo bất đẳng thức Cauchy thì $x + \frac{a^2}{2x} \geq 2\sqrt{x.\frac{a^2}{2x}} = \sqrt{2}a \Rightarrow V_{ABMN} \geq \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Vậy thể tích lớn nhất của khối tứ diện $ABMN$ là $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$ khi $x = \frac{a^2}{2x} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 6. (2,0 điểm)) Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2018$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} + \frac{3029}{2}$.

Lời giải

* Xét bất đẳng thức phụ: $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ với mọi $a, b > 0$.

* Dùng bất đẳng thức trên ta có:

$$\frac{1}{2x+y+z} = \frac{1}{(x+y)+(x+z)} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z}\right) \leq \frac{1}{16}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$$

Tương tự ta có: $\frac{1}{x+2y+z} \leq \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z}\right)$; $\frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z}\right)$

Suy ra: $P \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \frac{3029}{2} = \frac{2018}{4} + \frac{3029}{2} = 2019$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 2019 đạt được khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{3}{2018}$.

HẾT

SỞ GD &ĐT ĐỒNG NAI **NĂM HỌC 2018 - 2019**

ĐỀ HSG KHỐI 12 CHUYÊN **MÔN: TOÁN**

(Đề gồm 01 trang) **Thời gian: 180 phút**

Họ và tên:..... SBD:……

Câu 1 (5 điểm).

1) Chứng minh rằng phương trình $-x=\sqrt[3]{x^2-6x+3}$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt

x_1,x_2,x_3. Tính giá trị của biểu thức $T=\left(x_1^3+x_1^2+9\right)\left(x_2^3+x_2^2+9\right)\left(x_3^3+x_3^2+9\right)$.

2) Cho hai hàm số $y=x^3+x^2-3x-1, y=2x^3+2x^2-mx+2$ có đồ thị lần lượt là $(C_1),(C_2)$ và m là tham số thực. Tìm m để (C_1) cắt (C_2) tại 3 điểm phân biệt có tung độ là y_1,y_2,y_3 thỏa

$$\frac{1}{y_1+4}+\frac{1}{y_2+4}+\frac{1}{y_3+4}=\frac{2}{3}.$$

Câu 2 (3 điểm). Cho *a, b, c* là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c\ge abc$. Chứng minh rằng

$a^2+b^2+c^2\ge abc$.\

Câu 3 (4 điểm). Cho dãy (x_n) xác định bởi $x_1=x_2=1, x_n.x_{n+2}=x_{n+1}^2+3.(-1)^{n-1}$.

1) Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy (x_n) đều là số nguyên.

2) Tính $\lim\dfrac{x_{n+1}}{x_1+x_2+...+x_n}$.

Câu 4 (4 điểm). Cho tam giác ΔABC nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm H, K là trung điểm BC và G là

hình chiếu vuông góc của H trên AK. Lấy D đối xứng G qua BC và I đối xứng C qua D. Tia

phân giác ACB cắt AB tại F và tia phân giác BID cắt BD ở M, MF cắt AC tại E.

1) Chứng minh rằng D nằm trên đường tròn (O).

2) Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC ở X, XE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác EBM ở điểm

thứ hai là Y. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác EYD tiếp xúc đường tròn (O).

Câu 5 (4 điểm). Cho m,n là các số tự nhiên thỏa mãn $4m^3+m=12n^3+n$, chứng minh $m-n$ là lập phương

của một số nguyên.

******Hết*****

LỜI GIẢI CHI TIẾT HSG 12 CHUYÊN - BẢNG A - ĐỒNG NAI 2018-2019

Câu 1.

1) Chứng minh rằng phương trình $-x=\sqrt[3]{x^2-6x+3}$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt x_1,x_2,x_3. Tính

giá trị của biểu thức $T=\left(x_1^3+x_1^2+9\right)\left(x_2^3+x_2^2+9\right)\left(x_3^3+x_3^2+9\right)$.

2) Cho hai hàm số $y=x^3+x^2-3x-1, y=2x^3+2x^2-mx+2$ có đồ thị lần lượt là $(C_1),(C_2)$ và m là tham số thực. Tìm m để (C_1) cắt (C_2) tại 3 điểm phân biệt có tung độ là y_1,y_2,y_3 thỏa

$$\frac{1}{y_1+4}+\frac{1}{y_2+4}+\frac{1}{y_3+4}=\frac{2}{3}.$$

Lời giải

1) Phương trình đã cho tương đương $x^3+x^2-6x+3=0$. Xét hàm số $f(x)=x^3+x^2-6x+3$ liên tục

trên $\mathbb{R}$ và có $f(-3).f(0)<0,\ f(0).f(1)<0,\ f(1).f(2)<0$ nên phương trình có nghiệm

$x_1\in(-3;0)$, $x_2\in(0;1)$, $x_3\in(1;2)$.

Mặt khác, đây là phương trình bậc 3 nên đây là tất cả các nghiệm của phương trình đã cho.

Do phương trình có 3 nghiệm x_1,x_2,x_3 nên $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

Ta có: $T=(6x_1+6)(6x_2+6)(6x_3+6)=-6^3.(-1-x_1)(-1-x_2)(-1-x_3)=-6^3.f(-1)=-6^3.9$

2) Giả sử A,B,C là giao điểm của hai đồ thị hàm số đã cho thì tọa độ A,B,C thỏa hệ

$$\begin{cases} y = x^3 + x^2 - 3x - 1 \\ y = 2x^3 + 2x^2 - mx + 2 \end{cases}.$$

Nên cũng thỏa phương trình hệ quả của hệ là: $y = (m-6)x - 4$.

Khi đó, ta có: $y_1 + 4 = (m-6)x_1$, $y_2 + 4 = (m-6)x_2$, $y_3 + 4 = (m-6)x_3$ với x_1, x_2, x_3 là nghiệm phương trình hoành độ giao điểm $x^3 + x^2 + (3-m)x + 3 = 0$.

Theo Vi-et ta có $\begin{cases} x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 3 - m \\ x_1x_2x_3 = -3 \end{cases}$.

Và từ giả thiết thì: $\frac{2}{3} = \frac{1}{y_1+4} + \frac{1}{y_2+4} + \frac{1}{y_3+4} = \frac{1}{m-6}.\frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = \frac{m-3}{3(m-6)}$.

Từ đây giải ra được $m = 9$.

Thử lại, $m = 9$ thì phương trình $x^3 + x^2 - 6x + 3 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt theo câu 1 nên $m = 9$ là giá trị cần tìm.

Câu 2. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c \ge abc$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \ge abc$.

Lời giải

Nếu tồn tại một trong ba số a,b,c bằng 0 thì điều cần chứng minh đúng.

Do đó chúng ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp $a,b,c > 0$.

Giả sử ngược lại $a^2 + b^2 + c^2 < abc$. Khi đó $abc > a^2 \Rightarrow a < bc$. Tương tự $b < ca, c < ab$.

Do đó $abc \ge a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca > a + b + c$ (mâu thuẫn). Do đó ta có đpcm.

Câu 3. Cho dãy (x_n) xác định bởi $x_1 = x_2 = 1, x_n.x_{n+2} = x_{n+1}^2 + 3.(-1)^{n-1}$.

1) Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy (x_n) đều là số nguyên

2) Tính $\lim \frac{x_{n+1}}{x_1 + x_2 + ... + x_n}$.

Lời giải

1) Ta có từ giả thiết $x_n.x_{n+2} = x_{n+1}^2 + 3.(-1)^{n-1}, x_{n-1}.x_{n+1} = x_n^2 + 3.(-1)^{n-2}$ từ đây suy ra

$x_n.x_{n+2} - x_{n+1}^2 = x_n^2 - x_{n-1}.x_{n+1}, \forall n = 2,3,...$

Hay suy ra $\frac{x_{n+2} - x_n}{x_{n+1}} = \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{x_n} = \frac{x_n - x_{n-2}}{x_{n-1}} = ... = \frac{x_3 - x_1}{x_2} = 3$

Từ đó ta có: $x_{n+2} = 3x_{n+1} + x_n, \forall n = 1,2,3,...$

Mà $x_1 = 1, x_2 = 1$ nên ta có $x_n \in \mathbb{Z}, \forall n = 1,2,3,...$

2) Dãy đã cho là dãy sai phân thuần nhất cấp hai nên có phương trình đặc trưng là $x^2 - 3x - 1 = 0$ với hai nghiệm $t_1 > 0 > t_2 > -1$ nên có công thức tổng quát là $x_n = At_1^n + Bt_2^n$.

Khi đó, $x_1 + x_2 + ... + x_n = A.\dfrac{t_1^{n+1} - 1}{t_1 - 1} + B\dfrac{t_2^{n+1} - 1}{t_2 - 1}$.

Từ đó ta có $\lim \dfrac{x_{n+1}}{x_1 + x_2 + ... + x_n} = \lim \dfrac{At_1^{n+1} + Bt_2^{n+1}}{A.\dfrac{t_1^{n+1} - 1}{t_1 - 1} + B\dfrac{t_2^{n+1} - 1}{t_2 - 1}} = t_1 - 1 = \dfrac{1 + \sqrt{13}}{2}$.

Câu 4 (4 điểm). Cho tam giác ΔABC nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm H, K là trung điểm BC và G là

hình chiếu vuông góc của H trên AK. Lấy D đối xứng G qua BC và I đối xứng C qua D. Tia

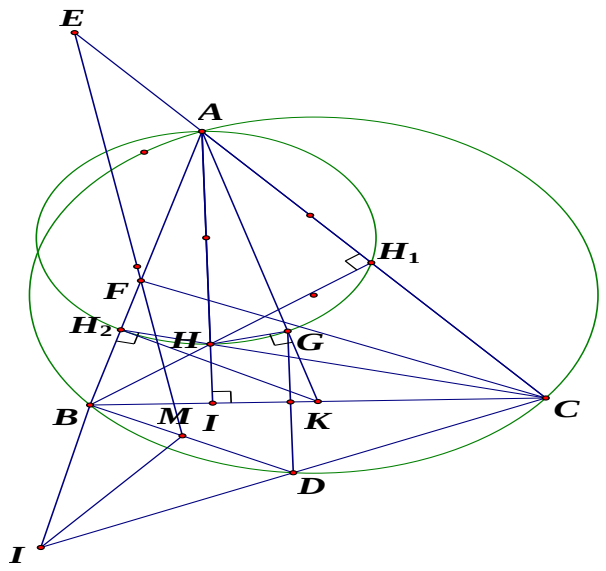
phân giác ACB cắt AB tại F và tia phân giác BID cắt BD ở M, MF cắt AC tại E.

1) Chứng minh rằng D nằm trên đường tròn (O).

2) Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC ở X, XE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác EBM ở điểm

thứ hai là Y. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác EYD tiếp xúc đường tròn (O).

Lời giải



1) Do G thuộc đường tròn đường kính AH và KH_1, KH_2 tiếp xúc (AH) với $H_1; H_2$ là chân

đường cao hạ từ B lên AC, C lên AB.

Từ đó ta có đẳng thức $KB^2 = KC^2 = KH_1^2 = KG.KA$.

Từ đó suy ra $KBG = KAB, KCG = KAC$. Kết hợp tính đối xứng, suy ra ABDC nội tiếp

2) Theo câu 1) ta có ABDC nội tiếp và AD là đối trung trong tam giác ABC .

Hay ta có tứ giác ABDC điều hòa.

Điều này dẫn đến ΔBDI đồng dạng ΔBAC theo trường hợp cạnh – góc – cạnh.

Suy ra $\frac{IB}{ID} = \frac{CB}{CA}$, mà IM,CF là hai đường phân giác nên ta có $\frac{MB}{MD} = \frac{FB}{FA}$ hay MF//AD

Do MF//AD nên $BMF = BDA = BCA$, dẫn đến BMCE nội tiếp.

Khi đó, lại có tứ giác ABDC điều hòa nên XD cũng tiếp xúc (O) và hơn nữa $XE.XY = XA^2 = XB.XC = XD^2$.

Điều này suy ra (DEY) tiếp xúc XD hay (DEY) tiếp xúc (O) ở D.

Câu 5 (4 điểm). Cho m,n là các số tự nhiên thỏa mãn $4m^3 + m = 12n^3 + n$, chứng minh $m-n$ là lập phương

của một số nguyên.

Lời giải

Ta có $4m^3 + m = 12n^3 + n \Leftrightarrow (m-n)(4m^2 + 4mn + 4n^2 + 1) = 8n^3$

Giả sử p là một ước nguyên tố chung của $m-n, 4m^2 + 4mn + 4n^2 + 1$ thì p là số lẻ do

$4m^2 + 4mn + 4n^2 + 1$ lẻ.

Mà $8n^3 \vdots p$ nên suy ra $n \vdots p$ hay từ đó ta có $m \vdots p$ do $m - n \vdots p$. Mà $4m^2 + 4mn + 4n^2 + 1$ cũng chia hết

cho p nên $1 \vdots p$, điều này vô lý.

Vậy $(m-n, 4m^2 + 4mn + 4n^3 + 1) = 1$ hay suy ra $m-n$ là lập phương của một số nguyên.

SỞ GD &ĐT HÀ NỘI **NĂM HỌC 2018 - 2019**

ĐỀ THI HSG KHỐI 12 **MÔN: TOÁN**

(Đề gồm 01 trang) **Thời gian: 180 phút**

Họ và tên: .....SBD:.....

Câu 1 (4 điểm). Cho hàm số $y=\dfrac{-x}{2x+1}$ có đồ thị là (C) và đường thẳng d có phương trình $y=x+m$, m là tham số. Tìm m để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho tổng các hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B là lớn nhất.

Câu 2 (5 điểm).

1) Giải phương trình $\cos x=1-x^2$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+3y^2+2xy-6x-2y+3=0 \\ x^2-y+5=2x\sqrt{y+3} \end{cases}$.

Câu 3 (3 điểm). Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1=\dfrac{1}{2}, a_{n+1}=\dfrac{a_n^2}{a_n^2-a_n+1}; n\in\mathbb{N}^*$

a) Chứng minh dãy số (a_n) là dãy số giảm.

b) Với mỗi số nguyên dương n, đặt $b_n=a_1+a_2+...+a_n$. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} b_n$.

Câu 4 (6 điểm).

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I, có đường cao AH. Gọi E là hình chiếu của B lên tia AI, HE cắt AC tại P. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết $H(6;-4); P(11;1)$ và $M(10;-4)$ là trung điểm của BC.

2) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Một mặt phẳng (P) cắt các tia AB, AD, AA', AC' lần lượt tại M, N, P, Q.

a) Chứng minh rằng: $\dfrac{\sqrt{3}}{AQ}=\dfrac{1}{AM}+\dfrac{1}{AN}+\dfrac{1}{AP}$.

b) Gọi H là hình chiếu của A lên (P). Chứng minh rằng $AQ<\sqrt{3}AH$.

Câu 5 (2 điểm). Cho các số thực a,b,c không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a+b+c-4abc$.

****** *Hết* ******

LỜI GIẢI CHI TIẾT HSG 12 HÀ NỘI 2018-2019

Câu 1. Cho hàm số $y=\dfrac{-x}{2x+1}$ có đồ thị là (C) và đường thẳng d có phương trình $y=x+m$, m là tham số. Tìm m để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho tổng các hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B là lớn nhất.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Hoàng Huy; Fb: Nguyen Hoang Huy

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$. Ta có $y=\dfrac{-x}{2x+1}\Rightarrow y'=\dfrac{-1}{(2x+1)^2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm

$\dfrac{-x}{2x+1}=x+m\Leftrightarrow g(x)=2x^2+2(m+1)x+m=0$ (1).

Ta có: $\begin{cases}\Delta'=m^2+2m+1-2m=m^2+1>0,\forall m\\ g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}\neq 0,\forall m\end{cases}$ nên đường thẳng d luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi giá trị thực m.

Gọi x_1, x_2 là hoành độ của điểm A và B khi đó x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1) $\begin{cases}S=x_1+x_2=-(m+1)\\ P=x_1x_2=\dfrac{m}{2}\end{cases}$.

Suy ra tổng các hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$ là

$$K=-\left[\frac{1}{(2x_1+1)^2}+\frac{1}{(2x_2+1)^2}\right]=-\frac{4S^2-8P+4S+2}{(4P+2S+1)^2}=-(4m^2+2)\le -2.$$

Vậy tổng hệ số góc lớn nhất của các tiếp tuyến với (C) tại A và B bằng -2 đạt được khi $m=0$.

Câu 2.

1) Giải phương trình $\cos x=1-x^2$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thanh Giang; Fb: Thanh Giang

Xét hàm số $f(x)=\cos x+x^2-1$ với $x\in\mathbb{R}$. Ta có $f'(x)=-\sin x+2x$, $f''(x)=-\cos x+2$.

Vì $f''(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà $f'(0)=0$ suy ra phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x)=0\Leftrightarrow x=0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=0$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+3y^2+2xy-6x-2y+3=0 & (1) \\ x^2-y+5=2x\sqrt{y+3} & (2) \end{cases}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Hồng Hạnh; Fb: Nguyễn Hồng Hạnh

Điều kiện: $y\ge -3$.

• Từ (1) ta có: $x^2+3y^2+2xy-6x-2y+3=0$

$\Leftrightarrow x^2+2(y-3)x+(y-3)^2+2y^2+4y-6=0$

$\Leftrightarrow (x+y-3)^2+2y^2+4y-6=0$

$\Rightarrow 2y^2+4y-6\le 0\Leftrightarrow -3\le y\le 1\quad (3)$

• Từ (2) ta lại có: $x^2-y+5=2x\sqrt{y+3}\Leftrightarrow x^2-2x\sqrt{y+3}+y+3+2(1-y)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{y+3}\right)^2+2(1-y)=0$

$\Rightarrow 2(1-y)\le 0\Leftrightarrow y\ge 1\quad (4)$

Từ (3) và $(4)\Rightarrow y=1$.

Thay $y=1$ vào hệ được $x=2$.

Vậy hệ có nghiệm là $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Câu 3. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1=\frac{1}{2}, a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_n^2-a_n+1}; n\in\mathbb{N}^*$

a) Chứng minh dãy số (a_n) là dãy số giảm.

b) Với mỗi số nguyên dương n, đặt $b_n=a_1+a_2+...+a_n$. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} b_n$.

Lời giải

Tác giả: Công Phương; Fb: Nguyễn Công Phương

a) Xét hiệu $a_{n+1}-a_n=\frac{a_n^2}{a_n^2-a_n+1}-a_n=\frac{-a_n(a_n-1)^2}{a_n^2-a_n+1}$.

Từ cách xác định dãy số ta có $a_n>0, \forall n\in\mathbb{N}^*$ và

$a_n^2-a_n+1>0 \Rightarrow a_{n+1}-a_n<0, \forall n\in\mathrm{N}^*$

Vậy (a_n) là dãy số giảm.

b) Ta có $a_{n+1}=\frac{a_n^2-a_n+1+a_n-1}{a_n^2-a_n+1}=1+\frac{a_n-1}{a_n^2-a_n+1}$.

$$\Rightarrow a_{n+1}-1=\frac{a_n-1}{a_n^2-a_n+1} \Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{a_n^2-a_n+1}{a_n-1}=a_n+\frac{1}{a_n-1}$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{1}{a_{n+1}-1}-\frac{1}{a_n-1}$$

Suy ra $b_n=a_1+a_2+...+a_n=\frac{1}{a_{n+1}-1}-\frac{1}{a_1-1}=\frac{1}{a_{n+1}-1}+2.\quad (1)$

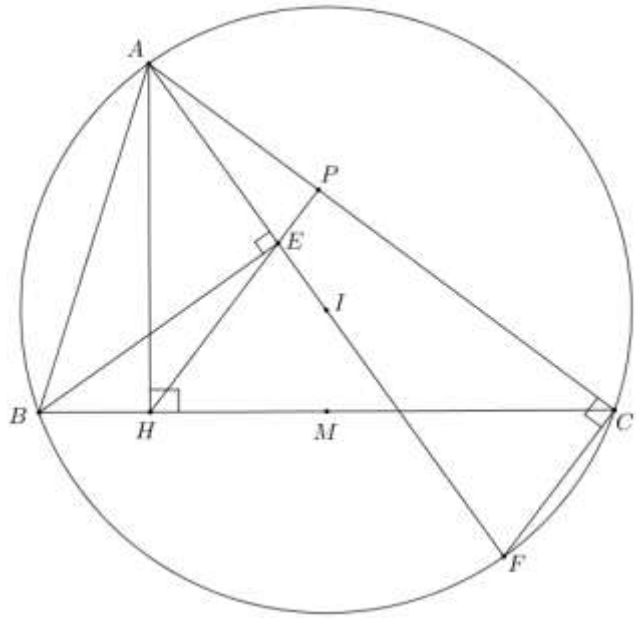
Lại có: Dãy số (a_n) là dãy số giảm, bị chặn dưới bởi 0 nên có giới hạn

Giả sử $\lim\limits_{x\to+\infty} a_n=a \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} a_{n+1}=a \Rightarrow a=\frac{a^2}{a^2-a+1} \Rightarrow a=0$ hay $\lim\limits_{x\to+\infty} a_n=0\ (2)$.

Từ (1) và (2) ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} b_n=1$.

Câu 4. **1)** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I, có đường cao AH. Gọi E là hình chiếu của B lên tia AI, HE cắt AC tại P. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết $H(6;-4); P(11;1)$ và $M(10;-4)$ là trung điểm của BC.

Lời giải



Nhận xét: Theo giả thiết thì H không thể trùng với $M \Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác thường.

Kẻ đường kính AF của đường tròn $(I) \Rightarrow \Delta ACF$ vuông tại C.

Xét tứ giác $AEHB$ có $AEB = AHB = 90^0$ và cùng nhìn cạnh AB.

$\Rightarrow$ Tứ giác $AEHB$ nội tiếp đường tròn có tâm là trung điểm AB.

$\Rightarrow ABH = AEP$.

Mà $AFC = ABH$ (cùng nhìn cạnh AC).

$\Rightarrow AFC = AEP \Rightarrow HP \,//\, FC$.

Lại có $FC \perp AC \Rightarrow HP \perp AC$.

Có $\overrightarrow{HP} = (5;5) = 5(1;1)$. Chọn $\overrightarrow{n_{AC}} = (1;1)$.

$P(11;1) \in AC$.

$\Rightarrow AC: x + y - 12 = 0$.

$\overrightarrow{HM} = (4;0)$.

Do đường thẳng BC chứa $H, M \Rightarrow \overrightarrow{n_{BC}} = (0;1)$.

$H(6;-4) \in BC$.

$\Rightarrow BC: y + 4 = 0$.

Có $C = BC \cap AC \Rightarrow$ tọa độ C là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y-12=0 \\ y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=16 \\ y=-4 \end{cases} \Rightarrow C(16;-4).$$

Lại có $M(10;-4)$ là trung điểm của $BC \Rightarrow B(4;-4)$.

Có $AH \perp BC \Rightarrow \overrightarrow{n_{AH}} = (1;0)$.

$H(6;-4) \in AH$.

$\Rightarrow AH: x-6=0$.

Có $A = AH \cap AC \Rightarrow$ tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y-12=0 \\ x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=6 \end{cases} \Rightarrow A(6;6).$$

Vậy $A(6;6); B(4;-4); C(16;-4)$.

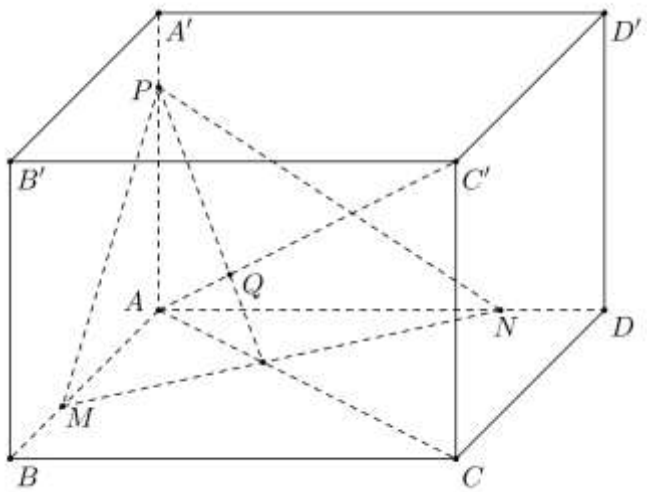
2) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Một mặt phẳng (P) cắt các tia AB, AD, AA', AC' lần lượt tại M, N, P, Q.

a) Chứng minh rằng: $\dfrac{\sqrt{3}}{AQ} = \dfrac{1}{AM} + \dfrac{1}{AN} + \dfrac{1}{AP}$.

b) Gọi H là hình chiếu của A lên (P). Chứng minh rằng $AQ < \sqrt{3}AH$.

Lời giải

Tác giả: Bùi Văn Lưu; Fb: Bùi Văn Lưu



a) Theo quy tắc hình hộp ta có:

$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\Rightarrow\frac{AC'}{AQ}\overrightarrow{AQ}=\frac{AB}{AM}\overrightarrow{AM}+\frac{AD}{AN}\overrightarrow{AN}+\frac{AA'}{AP}\overrightarrow{AP}$.

Ta có AC' là đường chéo của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$

$\Rightarrow AB=AD=AA'=\frac{1}{\sqrt{3}}AC'$.

Mà M, N, P, Q đồng phẳng nên $\frac{AC'}{AQ}=\frac{AB}{AM}+\frac{AD}{AN}+\frac{AA'}{AP}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{AQ}=\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}+\frac{1}{AP}$.

b) Ta có $AMNP$ là tứ diện vuông $\Rightarrow\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AN^2}+\frac{1}{AP^2}$.

Mà $\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AN^2}+\frac{1}{AP^2}<\left(\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}+\frac{1}{AP}\right)^2$.

$\Rightarrow\frac{1}{AH}<\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}+\frac{1}{AP}\Rightarrow\frac{1}{AH}<\frac{\sqrt{3}}{AQ}\Rightarrow AQ<\sqrt{3}AH$.

Câu 5. Cho các số thực a,b,c không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a+b+c-4abc$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Phương Mai; Fb: Phương Mai

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$ thì từ $1=a^2+b^2+c^2\Rightarrow 1\le 3a^2\Rightarrow a^2\ge\frac{1}{3}$.

Mặt khác: $2bc\le b^2+c^2=1-a^2\Rightarrow 0\le 2bc\le 1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\Rightarrow 0\le bc\le\frac{1}{3}$.

Ta có:

$P^2=\left[a(1-4bc)+(b+c).1\right]^2\le\left[a^2+(b+c)^2\right]\left[(1-4bc)^2+1\right]=(1+2bc)\left[(1-4bc)^2+1\right]$.

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a}{1-bc}=b+c$ $(*)$.

Đặt $t=bc\Rightarrow 0\le t\le\frac{1}{3}$. Suy ra được $P^2\le(1+2t)(16t^2-8t+2)=32t^3-4t+2$.

Xét hàm số $f(t)=32t^3-4t+2, t\in\left[0;\frac{1}{3}\right]$; $f'(t)=96t^2-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{\sqrt{6}}{12}\\ t=\frac{-\sqrt{6}}{12}(l)\end{array}\right.$.

$f(0)=2;\ f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{50}{27};\ f\left(\frac{\sqrt{6}}{12}\right)\approx 1,4556$.

Suy ra GTLN $f(t)=2$ khi $t=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ c=0 \end{array}\right. \overset{(*)}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{l} a=c=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ a=b=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$.

Kết luận: $\max P=\sqrt{2}$, đạt được khi $\begin{cases} a=b=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ c=0 \end{cases}$, hoặc các hoán vị của nó.

SỞ GD &ĐT ĐỒNG NAI	**NĂM HỌC 2018 - 2019**
ĐỀ THI HSG KHỐI 12	**MÔN: TOÁN**
(Đề gồm 01 trang)	**Thời gian: 180 phút**

Họ và tên:..... SBD: .....

Câu 1 (5 điểm). Cho hàm số $y=2x^3-3(m+3)x^2+18mx+8$, m là tham số.

a) Tìm m để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Tìm m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung.

c) Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;0]$ bằng -24.

Câu 2 (3,5 điểm).

a) Giải phương trình $8.25^x-8.10^x-15.2^{2x+1}=0$.

b) Giải phương trình $(1+2\sin 4x)\tan 2x=1$.

Câu 3 (3,5 điểm). Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với mặt phẳng (BCD). Tam giác BCD là tam giác đều $AB=a$, $BC=2a$.

1) Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD).

2) Tính theo a khoảng cách giữa hai đường AC và BD.

Câu 4 (3,0 điểm). Trong một tiết học môn Toán, giáo viên mời ba học sinh A, B, C thực hiện trò chơi như sau: Mỗi bạn A, B, C chọn ngẫu nhiên một số nguyên khác 0

thuộc khoảng $(-6;6)$ và lần lượt thế vào ba tham số của hàm số $y=ax^4+bx^2+c$, nếu đồ thị hàm số thu được có ba điểm cực trị đều nằm phía trên trục hoành thì được nhận thưởng. Tính xác suất để ba học sinh A, B, C được nhận thưởng.

Câu 5 (2,5 điểm). Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-x^2y-y^2-2x+1=0 & (1) \\ \sqrt{x}-x-2=\sqrt{3y-2}-2y^2 & (2) \end{cases}$

Câu 6 (2,5 điểm).

1) Cho ba số thực dương a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=\frac{a}{2b+3c}+\frac{b}{2c+3a}+\frac{c}{2a+3b}$$

2) Chứng minh rằng C_{3n}^{n} chia hết cho 3 với mọi n nguyên dương.

******Hết*****

LỜI GIẢI CHI TIẾT HSG 12 ĐỒNG NAI 2018-2019

Câu 1. Cho hàm số $y=2x^3-3(m+3)x^2+18mx+8$, m là tham số.

a) Tìm m để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Tìm m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung.

c) Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;0]$ bằng -24.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Oanh; Fb: Oanh Nguyen

a) Ta có $y'=6x^2-6(m+3)x+18m$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi

$\Delta'_{y'}\le 0 \Leftrightarrow 9(m+3)^2-108m\le 0 \Leftrightarrow m^2-6m+9\le 0 \Leftrightarrow m=3$.

b) Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung khi $y'=0$ có hai nghiệm trái dấu

$\Leftrightarrow 6x^2-6(m+3)x+18m=0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow m<0$.

c) Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;0]$ bằng -24.

Ta thấy $y'=0 \Leftrightarrow 6x^2-6(m+3)x+18m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=3\notin[-1;0] \end{array}\right.$

+ Nếu $m=3$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên hàm số đồng biến trên $[-1;0]$, suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;0]$ là $y(-1)=-66\neq-24$, nên $m=3$ không thỏa mãn.

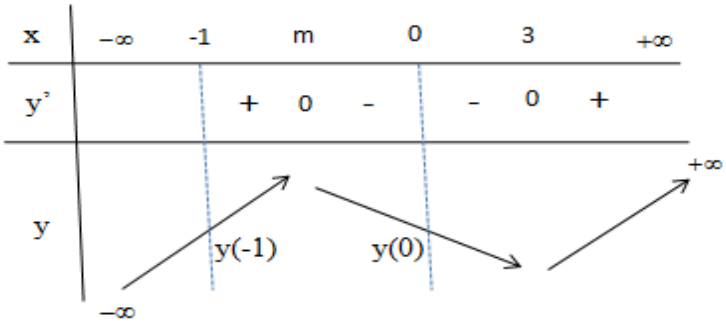
+ Nếu $m\neq3$, khi đó $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\x=3\notin[-1;0]\end{array}\right.$

***)TH1**: $m\notin[-1;0]$, ta tính được $y(0)=8$, $y(-1)=-3-21m$, $\min\limits_{[-1;0]}y=\min\{y(0),y(-1)\}$.

Để giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;0]$ bằng -24 thì

$$\begin{cases}m\notin[-1;0]\\y(-1)=-24\\y(-1)\le y(0)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\notin[-1;0]\\-3-21m=-24\\-3-21m\le8\end{cases}\Leftrightarrow m=1.$$

***)TH2**: $m\in[-1;0]$, từ bảng biến thiên của hàm số



Suy ra $\min\limits_{[-1;0]}y=\min\{y(0),y(-1)\}$.

Để giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;0]$ bằng -24 (do $y(0)=8\neq-24$) thì

$$\begin{cases}m\in[-1;0]\\y(-1)=-24\\y(-1)\le y(0)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\in[-1;0]\\m=1\end{cases}$$ do đó, không tồn tại giá trị của m.

Vậy $m=1$.

Câu 2. **a)** Giải phương trình $8.25^x-8.10^x-15.2^{2x+1}=0$.

b) Giải phương trình $(1+2\sin4x)\tan2x=1$.

Lời giải

Tác giả: Đỗ Hoàng Tú; Fb: Đỗ Hoàng Tú

a) $8.25^x - 8.10^x - 15.2^{2x+1} = 0 \Leftrightarrow 8.\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - 8.\left(\frac{5}{2}\right)^x - 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{5}{2} \\ \left(\frac{5}{2}\right)^x = -\frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy $x = 1$.

b) Điều kiện $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Khi đó,

$(1 + 2\sin 4x)\tan 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x + 2\sin 4x.\sin 2x = \cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x - \cos 6x = \cos 2x$.

$\Leftrightarrow \sin 2x = \cos 6x \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos 6x$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - 2x = 6x + k2\pi \\ \frac{\pi}{2} - 2x = -6x + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4} \\ x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy phương trình có hai họ nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4} \\ x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

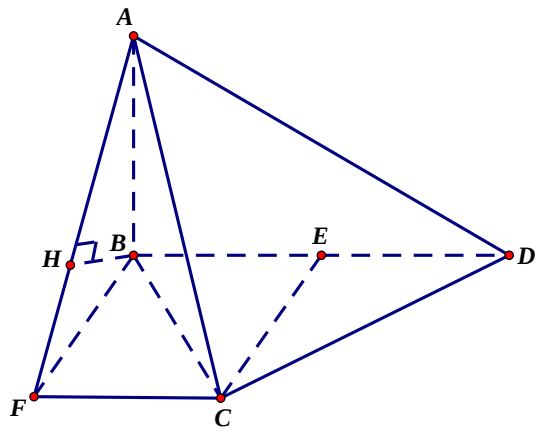
Câu 3 . Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với mặt phẳng (BCD). Tam giác BCD là tam giác đều, $AB = a$, $BC = 2a$.

1) Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD).

2) Tính theo a khoảng cách giữa hai đường AC và BD.

Lời giải

Tác giả: Yến Lâm; Fb: Yen Lam



1) Ta có $AB \perp (BCD)$ mà $AB \subset (ABC) \Rightarrow (ABC) \perp (BCD)$.

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) là 90^0.

2) Gọi E là trung điểm BD, dựng hình chữ nhật $BFCE$. Gọi H là hình chiếu của B trên AF.

Ta có $BD // FC \Rightarrow BD // (AFC)$.

Suy ra $d(BD, AC) = d(BD, (AFC)) = d(B, (AFC))$.

Mặt khác ta có: $BH \perp AF$ (1).

$$\begin{cases} CF \perp BF \\ CF \perp AB \end{cases} \Rightarrow CF \perp (ABF) \Rightarrow CF \perp BH \ (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $BH \perp (ACF)$.

Vậy $BH = d(B, (ACF)) = d(BD, AC)$.

Xét tam giác vuông ABF ta có:

$$BH.AF = AB.BF \Rightarrow BH = \frac{AB.BF}{AF} = \frac{AB.BF}{\sqrt{AB^2 + BF^2}} = \frac{AB.CE}{\sqrt{AB^2 + CE^2}} = \frac{a.a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $d(BD, AC) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 4. Trong một tiết học môn Toán, giáo viên mời ba học sinh A, B, C thực hiện trò chơi như sau: Mỗi bạn A, B, C chọn ngẫu nhiên một số nguyên khác 0 thuộc khoảng $(-6;6)$ và lần lượt thế vào ba tham số của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$; nếu đồ thị hàm số thu được có ba điểm cực trị đều nằm phía trên trục hoành thì được nhận thưởng. Tính xác suất để ba học sinh A, B, C được nhận thưởng.

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu : $n(\Omega)=10^3$.

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow ab<0$.

Ta có : $y'=4ax^3+2bx=0\Leftrightarrow 2x\left(2ax^2+b\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}\end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A(0;c), B\left(-\sqrt{-\dfrac{b}{2a}};-\dfrac{b^2}{4a}+c\right)$,

$C\left(\sqrt{-\dfrac{b}{2a}};-\dfrac{b^2}{4a}+c\right)$.

***)Trường hợp 1:**

Nếu $a<0$ thì A là điểm cực tiểu nên đồ thị hàm số có ba điểm cực trị đều nằm phía trên trục hoành

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\b>0\\y_A>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\b>0\\c>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\in\{-5;-4;-3;-2;-1\}\\b\in\{1;2;3;4;5\}\\c\in\{1;2;3;4;5\}\end{cases}\Rightarrow \text{có } 5.5.5=125 \text{ (cách)}.$$

***)Trường hợp 2:**

Nếu $a>0$ thì B,C là hai điểm cực tiểu nên đồ thị hàm số có ba điểm cực trị đều nằm phía trên trục hoành

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\b<0\\y_B>0\\y_C>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\b<0\\\dfrac{b^2}{4a}<c\end{cases}.$$

Suy ra được $c>0$ và $4a\in\{4;8;12;16;20\}$.

Ta có các khả năng sau:

Với $c=1\Rightarrow\dfrac{b^2}{4a}<1$, $b=-1\Rightarrow a\in\{1;2;3;4;5\}\Rightarrow$ có 5 (cách).

Với $c=1\Rightarrow\dfrac{b^2}{4a}<1$, $b=-2\Rightarrow a\in\{2;3;4;5\}\Rightarrow$ có 4 (cách).

Với $c=1\Rightarrow\dfrac{b^2}{4a}<1$, $b=-3\Rightarrow a\in\{3;4;5\}\Rightarrow$ có 3 (cách).

Với $c=1 \Rightarrow \frac{b^2}{4a}<1$, $b=-4 \Rightarrow a \in \{5\} \Rightarrow$ có 1 (cách).

Với $c=2 \Rightarrow \frac{b^2}{4a}<2$, $b=-1 \Rightarrow a \in \{1;2;3;4;5\} \Rightarrow$ có 5 (cách).

Với $c=2 \Rightarrow \frac{b^2}{4a}<2$, $b=-2 \Rightarrow a \in \{1;2;3;4;5\} \Rightarrow$ có 5 (cách).

Với $c=2 \Rightarrow \frac{b^2}{4a}<2$, $b=-3 \Rightarrow a \in \{2;3;4;5\} \Rightarrow$ có 4 (cách).

Với $c=2 \Rightarrow \frac{b^2}{4a}<2$, $b=-4 \Rightarrow a \in \{3;4;5\} \Rightarrow$ có 3 (cách).

Với $c=2 \Rightarrow \frac{b^2}{4a}<2$, $b=-5 \Rightarrow a \in \{4;5\} \Rightarrow$ có 2 (cách).

Với $c=3 \Rightarrow \frac{b^2}{4a}<3$, $b=-1 \Rightarrow a \in \{1;2;3;4;5\} \Rightarrow$ có 5 (cách).

Với $c=3 \Rightarrow \frac{b^2}{4a}<3$, $b=-2 \Rightarrow a \in \{1;2;3;4;5\} \Rightarrow$ có 5 (cách).

Với $c=3 \Rightarrow \frac{b^2}{4a}<3$, $b=-3 \Rightarrow a \in \{1;2;3;4;5\} \Rightarrow$ có 5 (cách).

Với $c=3 \Rightarrow \frac{b^2}{4a}<3$, $b=-4 \Rightarrow a \in \{2;3;4;5\} \Rightarrow$ có (cách).

Với $c=3 \Rightarrow \frac{b^2}{4a}<3$, $b=-5 \Rightarrow a \in \{3;4;5\} \Rightarrow$ có 3 (cách).

Với $c=4 \Rightarrow \frac{b^2}{4a}<4$, $b=-1 \Rightarrow a \in \{1;2;3;4;5\} \Rightarrow$ có 5 (cách).

Với $c=4 \Rightarrow \frac{b^2}{4a}<4$, $b=-2 \Rightarrow a \in \{1;2;3;4;5\} \Rightarrow$ có 5 (cách).

Với $c=4 \Rightarrow \frac{b^2}{4a}<4$, $b=-3 \Rightarrow a \in \{1;2;3;4;5\} \Rightarrow$ có 5 (cách).

Với $c=4 \Rightarrow \frac{b^2}{4a}<4$, $b=-4 \Rightarrow a \in \{2;3;4;5\} \Rightarrow$ có 4 (cách).

Với $c=4 \Rightarrow \frac{b^2}{4a}<4$, $b=-5 \Rightarrow a \in \{2;3;4;5\} \Rightarrow$ có 4 (cách).

Với $c=5 \Rightarrow \frac{b^2}{4a}<5$, $b=-1 \Rightarrow a \in \{1;2;3;4;5\} \Rightarrow$ có 5 (cách).

Với $c=5 \Rightarrow \frac{b^2}{4a}<5$, $b=-2 \Rightarrow a \in \{1;2;3;4;5\} \Rightarrow$ có 5 (cách).

Với $c=5 \Rightarrow \frac{b^2}{4a}<5$, $b=-3 \Rightarrow a \in \{1;2;3;4;5\} \Rightarrow$ có 5 (cách).

Với $c=5 \Rightarrow \frac{b^2}{4a}<5$, $b=-4 \Rightarrow a \in \{1;2;3;4;5\} \Rightarrow$ có 5 (cách).

Với $c=5 \Rightarrow \frac{b^2}{4a}<5$, $b=-5 \Rightarrow a \in \{2;3;4;5\} \Rightarrow$ có 4 (cách).

Trong trường hợp này có 101 (cách).

Suy ra có tất cả $125+101=226$ (cách).

Vậy xác suất là $\frac{226}{1000}=\frac{113}{500}$.

Câu 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-x^2y-y^2-2x+1=0 & (1) \\ \sqrt{x}-x-2=\sqrt{3y-2}-2y^2 & (2) \end{cases}$

Lời giải

Tác giả: Trịnh Văn Điệp; Fb: Trịnh Văn Điệp

Điều kiện: $x \ge 0$, $y \ge \frac{2}{3}$.

$(1) \Leftrightarrow \left(x^3-x^2y-x^2\right)+\left(x^2-xy-x\right)+\left(xy-x\right)+\left(1-y^2\right)=0$.

$\Leftrightarrow x^2(x-y-1)+x(x-y-1)+x(y-1)-(y-1)(y+1)=0$.

$\Leftrightarrow x^2(x-y-1)+x(x-y-1)+(y-1)(x-y-1)=0$.

$\Leftrightarrow (x-y-1)\left(x^2+x+y-1\right)=0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y+1 \\ x^2+x+y-1=0 \end{array}\right.$.

+) Với $x=y+1$ thay vào (2) ta được:

$\sqrt{y+1}-y-3=\sqrt{3y-2}-2y^2 \Leftrightarrow \sqrt{3y-2}-\sqrt{y+1}-\left(2y^2-y-3\right)=0$.

$\Leftrightarrow \frac{2y-3}{\sqrt{3y-2}+\sqrt{y+1}}-(2y-3)(y+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{3}{2} \Rightarrow x=\frac{5}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{3y-2}+\sqrt{y+1}}=y+1\ (*) \end{array}\right.$

Phương trình $(*)$ vô nghiệm vì $\dfrac{1}{\sqrt{3y-2}+\sqrt{y+1}}<1$ và $y+1>1,\ \forall y\ge\dfrac{2}{3}$.

Trường hợp này có nghiệm $\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

+) Với $x^2+x+y-1=0\Leftrightarrow 1-x-x^2=y$, vì $x\ge 0\Rightarrow 1-x-x^2\le 1\Rightarrow y\le 1$.

Kết hợp với điều kiện ta được $\dfrac{2}{3}\le y\le 1$.

Ta có $-x^2-x+1=y\Rightarrow \dfrac{2}{3}\le -x^2-x+1\le 1\Leftrightarrow \begin{cases}-3x^2-3x+1\ge 0\\ -x^2-x\le 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow 0\le x\le \dfrac{-3+\sqrt{21}}{6}<0,3$

Xét vế trái của (2): $f(x)=\sqrt{x}-x-2$ với $0\le x\le \dfrac{-3+\sqrt{21}}{6}\Rightarrow -\dfrac{7}{4}\le f(x)\le -2$.

Xét vế phải ta có $f(y)=\sqrt{3y-2}-2y^2$ với $\dfrac{2}{3}\le y\le 1$.

Ta có $f'(y)=\dfrac{3}{2\sqrt{3y-2}}-4y=0\Leftrightarrow 8y\sqrt{3y-2}=3\Leftrightarrow 192y^3-128y-9=0\Leftrightarrow y=\dfrac{3}{4}$

Suy ra $-1\le f(y)\le -\dfrac{5}{8}$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

Câu 6. **1)** Cho ba số thực dương a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=\frac{a}{2b+3c}+\frac{b}{2c+3a}+\frac{c}{2a+3b}$$

2) Chứng minh rằng C_{3n}^{n} chia hết cho 3 với mọi n nguyên dương.

Lời giải

Tác giả: Nhữ Văn Huấn; Fb: Huân Nhu

1) Đặt $\begin{cases}u=2b+3c\\ v=2c+3a\\ w=2a+3b\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{1}{35}(-6u+9v+4w)\\ b=\dfrac{1}{35}(4u-6v+9w)\\ c=\dfrac{1}{35}(9u+4v-6w)\end{cases}$.

$$P=\frac{1}{35}\left(\frac{-6u+9v+4w}{u}+\frac{4u-6v+9w}{v}+\frac{9u+4v-6w}{w}\right)$$

$$=\frac{1}{35}\left(-18+\frac{9v}{u}+\frac{4w}{u}+\frac{4u}{v}+\frac{9w}{v}+\frac{9u}{w}+\frac{4v}{w}\right)$$

$$=\frac{1}{35}\left(-18+\left(\frac{4v}{u}+\frac{4u}{v}\right)+\left(\frac{4w}{v}+\frac{4v}{w}\right)+\left(\frac{4w}{u}+\frac{4u}{w}\right)+\left(\frac{5v}{u}+\frac{5w}{v}+\frac{5u}{w}\right)\right)$$

$$\geq\frac{1}{35}\left(-18+2\sqrt{16}+2\sqrt{16}+2\sqrt{16}+\sqrt[3]{125}\right)=\frac{3}{5}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{5}\Leftrightarrow u=v=\text{w}\Leftrightarrow a=b=c$.

2) Ta có

$$C_{3n}^{n}=\frac{(3n)!}{n!.(2n)!}=\frac{1.2.3...(3n-1).3n}{1.2.3...n.(2n)!}=3.\frac{1.2.3...(3n-1)}{1.2.3...(n-1).(2n)!}=3.\frac{(3n-1)!}{(n-1)!.(2n)!}=3C_{3n-1}^{n-1}.$$

Nên C_{3n}^{n} chia hết cho 3 với mọi n nguyên dương.

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI

TỈNH VĨNH PHÚC

NĂM HỌC 2018 – 2019

Môn: Toán Lớp: 12

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN LỚP 12

TỈNH VĨNH PHÚC- NĂM 2018-2019

Câu 1: Cho hàm số $y=x^4-14x^2+20x+4$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta: y=-4x+15$.

Lời giải

Tác giả: Hoa Mùi ; Fb: Hoa Mùi

Ta có: $y=x^4-14x^2+20x+4\Rightarrow y'=4x^3-28x+20$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm.

Tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta: y=-4x+15$

$\Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến là: $k_{tt} = -4 \Leftrightarrow y'(x_0) = -4$

$$y'(x_0) = -4 \Leftrightarrow 4x_0^3 - 28x_0 + 20 = -4 \Leftrightarrow 4x_0^3 - 28x_0 + 24 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 11 \\ x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 4 \\ x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = -101 \end{array}\right.$$

.

Phương trình tiếp tuyến tại $M_1(1;11)$ là: $y = -4(x-1) + 11 = -4x + 15$ (loại)

Phương trình tiếp tuyến tại $M_2(2;4)$ là: $y = -4(x-2) + 4 = -4x + 12$ (nhận)

Phương trình tiếp tuyến tại $M_3(-3;-101)$ là: $y = -4(x+3) - 101 = -4x - 113$ (nhận)

Vậy các tiếp tuyến thỏa yêu cầu là: $y = -4x + 12$, $y = -4x - 113$.

Câu 2: Giải phương trình $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) + \sin x = \sin 2x$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Tường Lĩnh; Fb: Khoisx Bvkk

Ta có:

$(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) + \sin x = \sin 2x$

$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$

$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin x(2\cos x - 1)$

$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x - 1 = 0 \\ \cos x + \sin x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \tan x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}(m+1)x^2+3mx-m^2$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Lời giải

Tác giả: Hoàng Văn Lâm; Fb: LamHoang

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$y'=4x^2+3(m+1)x+3m$.

$y'\ge 0\ \forall x\in(-1;+\infty)\Leftrightarrow 4x^2+3(m+1)x+3m\ge 0\ \forall x\in(-1;+\infty)$

Với $x+1>0,\ \forall\ x\in(-1;+\infty)\ \Rightarrow -3m\le\frac{4x^2+3x}{x+1}\ \forall x\in(-1;+\infty)$

Xét hàm $f(x)=\frac{4x^2+3x}{x+1}\ \ \forall x\in(-1;+\infty)\Rightarrow f'(x)=\frac{4x^2+8x+3}{(x+1)^2}$

$$\Leftrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow 4x^2+8x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{2}(tm)\\ x=-\frac{3}{2}(l)\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

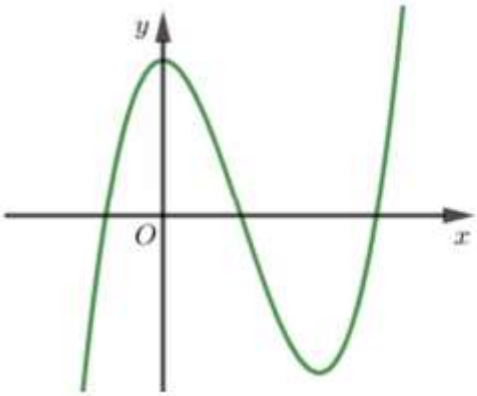
Vậy $-3m\le -1\Leftrightarrow m\ge\frac{1}{3}$.

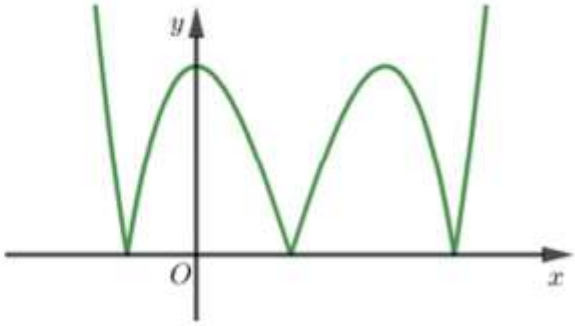
Câu 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m-2\right|$ có đúng năm điểm cực trị

Lời giải

Tác giả: Huỳnh Anh Kiệt ; Fb: Huỳnh Kiệt

Hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m-2\right|$ có đúng năm điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y=x^3-3x^2+m-2$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $x^3-3x^2+m-2=0$ (1) có 3 nghiệm phân biệt.





Ta có $(1)\Leftrightarrow x^3-3x^2=2-m$

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2$ ta có $f'(x)=3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-4<2-m<0\Leftrightarrow 2<m<6$.

Câu 5. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n=\ln\left[1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]$, $(n\in\mathbb{N})$. Tìm giá trị của biểu thức $H=2019.e^{u_1}.e^{u_2}...e^{u_{2018}}$

Lời giải

Tác giả: Lê Ngọc Hùng ; Fb: Hung Le

Ta có: $u_n=\ln\left[1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]=\ln\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

Do đó

$$\sum_{i=1}^{n} u_k = \ln \prod_{k=1}^{n} \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} = \ln \frac{1.2.3...n.(1+2).(2+2)...(n+2)}{2^2.3^2...(n+1)^2} = \ln \frac{n!(n+2)!}{\left[(n+1)!\right]^2.2!} = \ln \frac{n+2}{2(n+1)}$$

.

Suy ra $H = 2019.e^{u_1}.e^{u_2}...e^{u_{2018}} = 2019.e^{\sum_{k=1}^{2018} u_k} = 2019.e^{\ln \frac{2018+2}{2(2018+1)}} = 2019.\frac{2020}{2.2019} = 1010$.

Câu 6. Xếp mười học sinh gồm bốn học sinh lớp 12, ba học sinh lớp 11 và ba học sinh lớp 10 ngồi vào một hàng ngang gồm 10 ghế được đánh số từ 1 đến 10. Tính xác suất để không có hai học sinh lớp 12 ngồi cạnh nhau.

Lời giải

Tác giả: Hoàng Minh Thành ; Fb: Hoàng Minh Thành

Số cách xếp bất kỳ 10 học sinh là: $n(\Omega) = 10!$

Gọi A là biến cố "Không có hai học sinh lớp 12 ngồi cạnh nhau"

Số cách xếp 6 học sinh gồm lớp 11 và lớp 10 là : $6!$. Vì 6 học sinh được xếp ở trên tạo ra 7 khoảng trống (5 khoảng giữa 2 học sinh và 2 khoảng ở vị trí hai đầu) nên chọn 4 trong 7 vị trí đó để xếp 4 học sinh lớp 12 có A_7^4 cách

Suy ra : $n(A) = 6!.A_7^4$

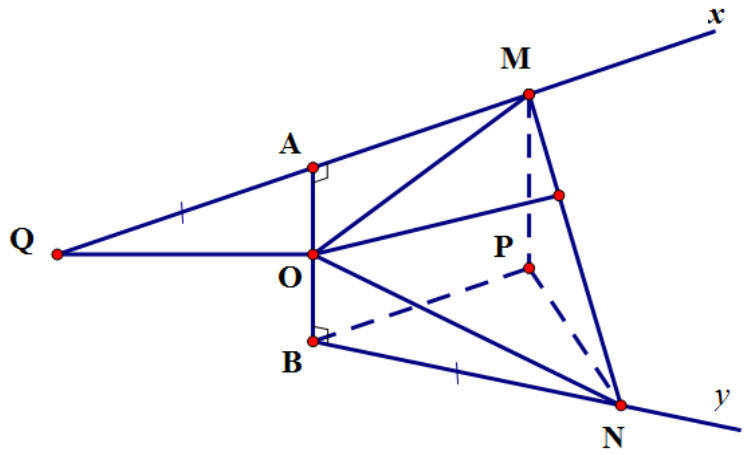
Xác suất của biến cố A là : $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}$

Vậy xác suất để không có hai học sinh lớp 12 ngồi cạnh nhau là: $\frac{1}{6}$.

Câu 7. Cho hai đường thẳng Ax, By chéo nhau, vuông góc và nhận đoạn AB làm đoạn vuông góc chung. Hai điểm M, N lần lượt di động trên Ax, By sao cho $AM + BN = MN$. Gọi O là trung điểm của đoạn AB. Chứng minh tam giác OMN là tam giác tù và khoảng cách từ O đến đường thẳng MN không đổi khi M, N di động trên Ax, By.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Trần Vũ; Fb: Nguyễn Trần Vũ



Dựng hình chữ nhật $ABPM$.

Ta có:

$MP//AB$ mà $\begin{cases} AB \perp BN \\ AB \perp BP \end{cases} \Rightarrow MP \perp NP$

$\begin{cases} BN \perp AB \\ BN \perp AM \end{cases} \Rightarrow BN \perp (ABPM) \Rightarrow BN \perp BP$

Do đó: $MN^2 = MP^2 + NP^2 = MP^2 + BP^2 + BN^2 = AB^2 + AM^2 + BN^2$

Theo đề bài ta có $MN = AM + BN \Rightarrow MN^2 = AM^2 + BN^2 + 2AM.BM$

Suy ra: $AM.BN = \dfrac{AB}{2}$

Áp dụng hệ quả định lí côsin cho tam giác OMN, ta có:

$$\cos MON = \frac{OM^2 + ON^2 - MN^2}{2OM.ON} = \frac{\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BN}\right)^2 - \left(AM + BN\right)^2}{2OM.ON}$$

$$= \frac{OA^2 + 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AM} + AM^2 + OB^2 + 2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{BN} + BN^2 - AM^2 - 2AM.BN - BN^2}{2OM.ON}$$

$$= \frac{OA^2 + OB^2 - 2AM.BN}{2OM.ON} = \frac{\dfrac{AB^2}{2} - 2.\dfrac{AB^2}{2}}{2OM.ON} = -\frac{AB^2}{4OM.ON} < 0$$

$\Rightarrow MON$ là góc tù $\Rightarrow$ (đpcm).

Kẻ $OH \perp MN, \left(H \in MN\right)$

Trên tia đối của tia Ax lấy điểm Q sao cho $AQ = BN$

Do $\Delta OAQ = \Delta OBN$ $\left(c - g - c\right) \Rightarrow OQ = ON$

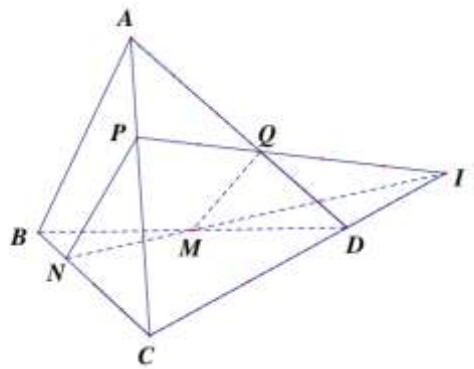
Vì $MN = AM + BN = AM + AQ = MQ \Rightarrow \Delta OMQ = \Delta OMN\ (c-c-c) \Rightarrow OA = OH$

Vậy $d(O, MN) = OH = \dfrac{AB}{2}$ không đổi.

Câu 8. Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N, P lần lượt là các điểm thuộc các cạnh BD, BC, AC sao cho $BD = 2BM, BC = 4BN, AC = 3AP$. mặt phẳng (MNP) cắt AD tại điểm Q. Tính tỉ số thể tích của hai phần của khối tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Lời giải

Tác giả: Hồ Thanh Nhân; Fb:NhanHoThanh



Trong mặt phẳng (BCD) gọi I là giao điểm của MN và CD, Q là giao điểm của IP và AD.

$\Rightarrow AD$ cắt mặt phẳng (MNP) tại Q.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác BCD có ba điểm N, M, I thẳng hàng.

$$\frac{NB}{NC}.\frac{IC}{ID}.\frac{MD}{MB} = 1 \Rightarrow \frac{IC}{ID} = 3\ .$$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ACD có ba điểm P, I, Q thẳng hàng.

$$\frac{PA}{PC}.\frac{IC}{ID}.\frac{QD}{QA} = 1 \Rightarrow \frac{QD}{QA} = \frac{2}{3}$$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ICN có ba điểm $\mathrm{D}, M, \mathrm{P}$ thẳng hàng.

$$\frac{DC}{DI}.\frac{MI}{MN}.\frac{BN}{BC} = 1 \Rightarrow \frac{MI}{MN} = 2$$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác IPC có ba điểm D, Q, A thẳng hàng.

$$\frac{DC}{DI}.\frac{QI}{QP}.\frac{AP}{AC} = 1 \Rightarrow \frac{IQ}{QP} = \frac{3}{2}\ .$$

Áp dụng công thức tính tỉ số thể tích ta có:

$$\frac{V_{IMQD}}{V_{INPC}}=\frac{IQ}{IP}.\frac{IM}{IN}.\frac{ID}{IC}=\frac{3}{5}.\frac{2}{3}.\frac{1}{3}=\frac{2}{15}\quad(1)$$

$$\frac{V_{INPC}}{V_{ABCI}}=\frac{CN}{CP}.\frac{CP}{CA}=\frac{3}{4}.\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\quad(2)\ ;\ \frac{V_{ABCI}}{V_{ABCD}}=\frac{CI}{CD}=\frac{3}{2}\quad(3)$$

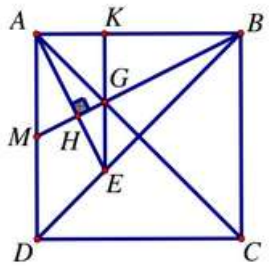
Từ (1),(2) và (3) $\Rightarrow \frac{V_{INPC}}{V_{ABCD}}=\frac{3}{4}$, $\quad \frac{V_{IMQD}}{V_{ABCD}}=\frac{3}{4}.\frac{2}{15}=\frac{1}{10}$

$$\Rightarrow \frac{V_{CDMNPQ}}{V_{ABCD}}=\frac{3}{4}-\frac{1}{10}=\frac{13}{20}\Rightarrow \frac{V_{ABMNPQ}}{V_{ABCD}}=1-\frac{13}{20}=\frac{7}{20}\ \Rightarrow \frac{V_{ABMNPQ}}{V_{CDMNPQ}}=\frac{7}{13}.$$

Câu 9. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$, điểm $G(3;3)$ là trọng tâm tam giác ABD. Đường thẳng đi qua A vuông góc với BG và cắt BD tại điểm $E(1;3)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$ biết rằng đỉnh A có tung độ lớn hơn 1.

Lời giải

Tác giả: Thành Lê; Fb: Thành Lê



Gọi M là trung điểm của cạnh AD, H là giao điểm của AE và BM, K là giao điểm của GE và AB.

Vì $AG\perp BE$ (do $AC\perp BD$) và $BG\perp AE$ (gt) nên G là trực tâm tam giác $ABE\Rightarrow GE\perp AB$, $GE\,//\,AD$.

Ta có $\frac{KG}{AM}=\frac{BG}{BM}$ do $KG\,//\,AM$ và $\frac{GE}{MD}=\frac{BG}{BM}$ do $GE\,//\,MD$

Suy ra $\frac{KG}{AM}=\frac{GE}{MD}$, mà $AM=MD\Rightarrow KG=GE$

$\Rightarrow G$ là trung điểm của $KE\Rightarrow\begin{cases}x_K=2x_G-x_E\\ y_K=2y_G-y_E\end{cases}\Rightarrow K(5;3)$.

AB đi qua $K(5;3)$ và có một véctơ pháp tuyến $\overrightarrow{EG}=(2;0)\Rightarrow AB: x-5=0$.

Vì $A \in AB \Rightarrow A(5; y_A)$ với $y_A > 1$. Mặt khác $KAG = 45° \Rightarrow \Delta AKG$ vuông cân nên $KA = KG$.

$\Rightarrow (y_A - 3)^2 = 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_A = 5 \\ y_A = 1 \end{array}\right.$, mà $y_A > 1$ nên $A(5;5)$.

Ta có $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG} \Rightarrow \begin{cases} x_C - 5 = -6 \\ y_C - 5 = -6 \end{cases} \Rightarrow C(-1;-1)$.

$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{GE} \Rightarrow \begin{cases} x_D - 5 = -6 \\ y_D - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow D(-1;5)$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \begin{cases} x_B - 5 = 0 \\ y_B - 5 = -6 \end{cases} \Rightarrow B(5;-1)$.

Câu 10. Cho ba số thực x, y, z thuộc khoảng $(0;3)$ thỏa mãn $\left(\frac{2}{x} - 1\right)\left(\frac{3}{y} - 1\right)\left(\frac{4}{z} - 1\right) = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}$.

Lời giải

Tác giả: Dương Quang Hưng ; Fb: Dương Quang Hưng

Đặt: $a = \frac{x}{2}, b = \frac{y}{3}, c = \frac{z}{4}$.

Khi đó ta có $a \in \left(0; \frac{3}{2}\right), b \in (0;1), c \in \left(0; \frac{3}{4}\right)$, thỏa mãn $\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right) = 1$ và $P = a^2 + b^2 + c^2$.

Từ: $\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right) = 1 \Rightarrow ab + bc + ca = 2abc + a + b + c - 1$.

Ta có: $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc$.

Do đó: $P = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 - 2(a+b+c) - 4abc + 2$

$\geq -\frac{4}{27}(a+b+c)^3 + (a+b+c)^2 - 2(a+b+c) + 2$

Đặt $t = a+b+c$, $t \in \left(0; \frac{13}{4}\right)$. Khi đó: $P \geq -\frac{4}{27}t^3 + t^2 - 2t + 2$.

Xét hàm số $f(t) = -\frac{4}{27}t^3 + t^2 - 2t + 2$, $t \in \left(0; \frac{13}{4}\right)$

Ta có: $f'(t)=-\frac{4}{9}t^2+2t-2$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{3}{2}$ hoặc $t=3$.

Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{3}{2}$		3		$\frac{13}{4}$
$f'(t)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	‖
$f(t)$	‖ 2	↘	$\frac{3}{4}$	↗	1	↘	$\frac{211}{216}$ ‖

Từ bảng biến thiên suy ra $f(t)\geq\frac{3}{4}$, $\forall t\in(0;3)$. Dấu bằng xảy ra khi $t=\frac{3}{2}$.

Khi $t=\frac{3}{2}$ ta được: $a=b=c=\frac{1}{2}$ suy ra $x=1, y=\frac{3}{2}, z=2$.

Do đó: $\min P=\frac{3}{4}\Leftrightarrow x=1, y=\frac{3}{2}, z=2$.

ĐỀ KỲ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH – BẮC NINH
NĂM HỌC 2018-2019
MÔN: TOÁN 12
TIME: 90 PHÚT

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-2}{-3}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$. Gọi M là giao điểm của Δ với mặt phẳng $(P): x+2y-3z+2=0$. Tọa độ của điểm M là:

A. $(5;-1;-3)$. **B.** $(-1;1;1)$. **C.** $(2;0;-1)$. **D.** $(1;0;1)$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x}$ có đồ thị (C). Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị (C) là:

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 3. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos 3x-\cos 2x+9\sin x-4=0$ trên khoảng $(0;3\pi)$ là:

A. $\frac{25\pi}{6}$. **B.** 6π. **C.** $\frac{11\pi}{3}$. **D.** 5π.

Câu 4. Cho $a>1$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng?**

A. $\frac{1}{a^{2016}}<\frac{1}{a^{2017}}$. **B.** $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}>1$. **C.** $a^{\frac{1}{3}}>\sqrt{a}$. **D.** $a^{-\sqrt{3}}>\frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ thỏa mãn

$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[f^2(x)-2f(x)(3-x)\right]dx=-\frac{109}{12}$. Tính $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{x^2-1}dx$.

A. $\ln\frac{7}{9}$. **B.** $\ln\frac{2}{9}$. **C.** $\ln\frac{5}{9}$. **D.** $\ln\frac{8}{9}$.

Câu 6. Tập xác định của hàm số $y=\left(4-3x-x^2\right)^{-2019}$ là:

A. $\mathbb{R}\setminus\{-4;1\}$. **B.** $[-4;1]$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(-4;1)$.

Câu 7. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Kẻ OH vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại H. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$. **B.** $OA\perp BC$.

C. H là trực tâm tam giác ABC. **D.** $AH\perp(OBC)$.

Câu 8. Cho phương trình $\log_2^2 x-2\log_2 x-\sqrt{m+\log_2 x}=m$ (*). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2019;2019]$ để phương trình (*) có nghiệm?

A. 2020. **B.** 2019. **C.** 2021. **D.** 4038.

Câu 9. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA=6$, $SB=2$, $SC=4$, $AB=2\sqrt{10}$ và $SBC=90°$, $ASC=120°$. Mặt phẳng (P) đi qua B và trung điểm N của SC và vuông góc với mặt phẳng (SAC) cắt cạnh SA tại M. Tính tỉ số thể tích $\frac{V_{S.MBN}}{V_{S.ABC}}$.

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{2}{9}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Câu 10. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn: $u_1=1, u_2=11, u_3=111,...,u_n=11...1$ (n chữ số 1, $n\in\mathbb{N}^*$). Đặt $S_n=u_1+u_2+...+u_n$. Giá trị của S_{2019} bằng

A. $\frac{1}{9}\left(\frac{10^{2012}-10}{9}+2019\right)$. **B.** $\frac{10}{9}\left(10^{2019}-1\right)+2019$.

C. $\frac{1}{9}\left(10^{2019}-1\right)$.

D. $\frac{1}{9}\left(\frac{10^{2020}-10}{9}-2019\right)$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(2;m-1;3)$, $\vec{b}=(1;3;-2n)$. Tìm m, n để các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng.

A. $m=7$; $n=-\frac{4}{3}$.

B. $m=1$; $n=0$.

C. $m=7$; $n=-\frac{3}{4}$.

D. $m=4$; $n=-3$.

Câu 12. Cho $T(x)=\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^{20}+\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{22}$ $(x\neq 0)$. Sau khi khai triển và rút gọn $T(x)$ có bao nhiêu số hạng?

A. 36.

B. 39.

C. 44.

D. 38.

Câu 13. Cho x, y là hai số thực dương khác 1 và α, β là hai số thực tùy ý. Mệnh đề nào sau đây **SAI**?

A. $\frac{x^\alpha}{y^\alpha}=\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha$.

B. $x^\alpha.x^\beta=x^{\alpha+\beta}$.

C. $x^\alpha.y^\alpha=(xy)^\alpha$.

D. $\frac{x^\alpha}{y^\beta}=\left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha-\beta}$.

Câu 14. Cho hàm số $y=ax^3+cx+d$, $a\neq 0$ có $\min\limits_{(-\infty;0)} f(x)=f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ bằng

A. $d+2a$.

B. $d+8a$.

C. $d-16a$.

D. $d-11a$.

Câu 15. Cho hàm số $y=(m-3)x-2m+1$ có đồ thị là đường thẳng d. Gọi S là tập các giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt trục Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB cân. Số tập con của tập S là

A. 3.

B. 2.

C. 6.

D. 4.

Câu 16. Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+x\right)=5$. Khi đó giá trị a là

A. 10.

B. -10.

C. -6.

D. 6.

Câu 17. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

A. $S=\ln 2-1$. **B.** $S=2\ln 2-1$. **C.** $S=2\ln 2+1$. **D.** $S=\ln 2+1$.

Câu 18. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ xy+yz+zx=-3 \\ x^6+y^6+z^6=m \end{cases}$ với x, y, z là ẩn số thực, m là tham số. Số giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm là

A. 24. **B.** 13. **C.** 12. **D.** 25.

Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=6a$; $CD=8a$ và các cạnh còn lại bằng $a\sqrt{74}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $S=96\pi a^2$. **B.** $S=100\pi a^2$. **C.** $S=25\pi a^2$. **D.** $S=\frac{100}{3}\pi a^2$.

Câu 20. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân, $AB=AC=a$, $AA'=h$ $(a,\ h>0)$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB' và BC' theo $a,\ h$.

A. $\frac{ah}{\sqrt{5a^2+h^2}}$. **B.** $\frac{ah}{\sqrt{a^2+5h^2}}$. **C.** $\frac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}$. **D.** $\frac{ah}{\sqrt{2a^2+h^2}}$.

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(6;0;0)$, $N(0;6;0)$, $P(0;0;6)$. Hai mặt cầu có phương trình $(S_1): x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0$ và $(S_2): x^2+y^2+z^2-8x+2y+2z+1=0$ cắt nhau theo đường tròn (C). Hỏi có bao nhiêu mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa (C) và tiếp xúc với ba đường thẳng MN, NP, PM?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** Vô số.

Câu 22. Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Xét các mệnh đề sau

1) $k.\int f(x)\mathrm{d}x=\int k.f(x)\mathrm{d}x$ với k là hằng số bất kì.

2) $\int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x$.

3) $\int[f(x).g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x.\int g(x)\mathrm{d}x$.

4) $\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x+\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x=f(x).g(x)$.

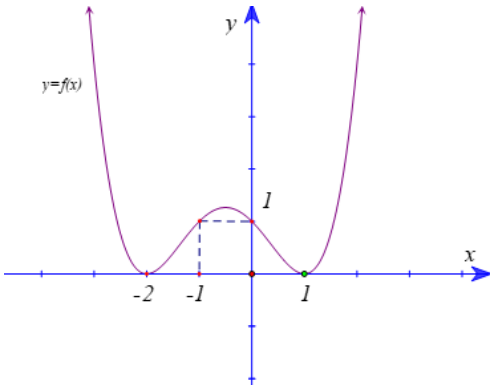
Tổng số mệnh đề **đúng** là:

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 23. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{4}}(x+1)>\log_{\frac{\pi}{4}}(2x-5)$ là

A. $\left(\frac{5}{2};6\right)$. **B.** $(-\infty;6)$. **C.** $(6;+\infty)$. **D.** $(-1;6)$.

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x); y=f'(x)$ có diện tích bằng



A. $\frac{127}{40}$. **B.** $\frac{107}{5}$. **C.** $\frac{13}{5}$. **D.** $\frac{127}{10}$.

Câu 25. Biết đường thẳng $y=x-2$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A và B có hoành độ x_A, x_B. Giá trị của biểu thức x_A+x_B bằng:

A. 2. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 26. Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{m^2-x^2}$ (m là tham số khác 0) và trục hoành. Khi (H) quay quanh trục hoành ta được khối tròn xoay có thể tích là V. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $V<1000\pi$.

A. 19. **B.** 20. **C.** 18. **D.**21.

Câu 27. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=a$ và $ASB=BSC=CSA=30°$. Mặt phẳng (α) bất kì qua A cắt SB, SC tại B', C'. Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi $\Delta AB'C'$.

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** a. **D.** $2a$.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=(1;1;-2)$, $\vec{v}=(1;0;m)$. Tìm tất cả các giá trị của m để góc giữa hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ bằng $45°$.

A. $m=2\pm\sqrt{6}$. **B.** $m=2+\sqrt{6}$. **C.** $m=2$. **D.** $m=2-\sqrt{6}$.

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\left[f(1+2x)\right]^2=x-\left[f(1-x)\right]^3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

A. $y=-x+\frac{6}{7}$. **B.** $y=-\frac{1}{7}x+\frac{8}{7}$. **C.** $y=-\frac{1}{7}x-\frac{6}{7}$. **D.** $y=\frac{1}{7}x-\frac{8}{7}$.

Câu 30. Cho hình trụ có bán kính đáy r. Gọi O và O' là tâm của hai đường tròn đáy với $OO'=2r$. Một mặt cầu tiếp xúc với hai đáy của hình trụ tại O và O'. Gọi V_c và V_r lần lượt là thể tích của khối cầu và khối trụ. Khi đó $\frac{V_c}{V_t}$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Câu 31. Xét hàm số $f(x)=\left|x^2+ax+b\right|$ với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[1;3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a+2b$.

A. -4. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 32. Thiết diện qua trục của một hình nón là tam giác đều cạnh có độ dài $2a$. Thể tích của khối nón là

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 33. Cho các hàm số $f_0(x), f_1(x), f_2(x),...$ thỏa mãn:

$$f_0(x)=\ln x+\left|\ln x-2019\right|-\left|\ln x+2019\right|,\ f_{n+1}(x)=\left|f_n(x)\right|-1, \forall n\in\mathbb{N}.$$

Số nghiệm của phương trình là

A. 6063. **B.** 6059. **C.** 6057. **D.** 6058.

Câu 34. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(x-3)^2=\frac{14}{3}$ và đường thẳng $d:\frac{x-4}{3}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-4}{1}$. Gọi $A(x_0;y_0;z_0)(x_0>0)$ là điểm nằm trên đường thẳng d sao cho từ A kẻ được ba tiếp tuyến đến mặt cầu (S) và các tiếp điểm B,C,D sao cho $ABCD$ là tứ diện đều .

Tính giá trị của $P=x_0+y_0+z_0$.

A. $P=8$. **B.** $P=6$. **C.** $P=16$. **D.** $P=12$.

Câu 35. Cho hàm số $y=x^3-(m+1)x^2+x+2m+1$ có đồ thị (C) (m là tham số thực). Gọi m_1, m_2 là các giá trị của m để đường thẳng $d:y=x+m+1$ cắt (C) tại ba điểm phân biết A, B, C sao cho tổng hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A, B, C bằng 19. Khi đó, m_1+m_2 bằng

A. -4. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -2.

Câu 36. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x+\cos x)}{\cos^2 x}dx = \frac{a}{b}\ln 2+\frac{\pi}{c}$ với a, b, c là các số nguyên. Khi đó, $\frac{bc}{a}$ bằng

A. $\frac{8}{3}$. **B.** -6. **C.** 6. **D.** $-\frac{8}{3}$.

Câu 37. Một tổ học sinh có 7 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 người. Tính xác suất sao cho 2 người được chọn đều là nữ.

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{1}{15}$. **C.** $\frac{7}{15}$. **D.** $\frac{8}{15}$.

Câu 38. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{2x+1}$ là

A. $-\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}+C$. **B.** $\frac{2}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}+C$.

C. $\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}+C$. **D.** $\frac{1}{2}\sqrt{2x+1}+C$.

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=x^3+mx-\frac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. 12. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và đường thẳng SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc $30°$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\sqrt{3}a^3$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **C.** $\frac{2a^3}{3}$. **D.** $\frac{2\sqrt{6}a^3}{3}$.

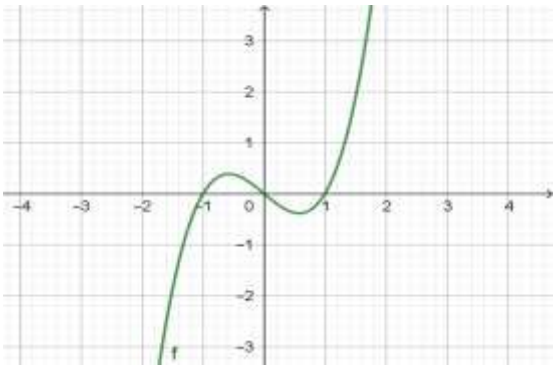
Câu 41. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$ và đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng (P), (P') chứa d và tiếp xúc với (S) tại T, T'. Tìm toạ độ trung điểm H của TT'.

A. $H\left(\frac{5}{6};\frac{2}{3};-\frac{7}{6}\right)$. **B.** $H\left(-\frac{7}{6};\frac{1}{3};\frac{7}{6}\right)$. **C.** $H\left(\frac{5}{6};\frac{1}{3};-\frac{5}{6}\right)$. **D.** $H\left(-\frac{5}{6};\frac{1}{3};\frac{5}{6}\right)$.

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4-2mx^2+(2m-1)=0$ có 4 nghiệm thực phân biệt là:

A. $(1;+\infty)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{1\}$. **C.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại mọi $x\in\mathbb{R}$, hàm số $y=f'(x)=x^3+ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left[f'(x)\right]$ là

A. 8. **B.** 11. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 44. Bất phương trình $\dfrac{\sqrt{2+3^{2x}}}{\sqrt{2+3^{2x}}-\sqrt{2-3^{2x}}}+\dfrac{3^{4x}+\sqrt{4-3^{4x}}-7}{3^{2x}}\geq\dfrac{3^{2x}-2}{\sqrt{4-3^{4x}}-2+3^{2x}}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3. **B.** 2. **C.** Vô số. **D.** 1.

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y+z+1=0$ và hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(2;1;1)$. Mặt phẳng (Q) chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng (P), mặt phẳng (Q) có phương trình là

A. $-x+y=0$. **B.** $3x-2y-z-3=0$.

C. $3x-2y-z-3=0$. **D.** $x+y+z-2=0$.

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị
nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị?

A. 6. **B.** 5. **C.** 0. **D.** 7.

Câu 47. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

A. $V=\dfrac{\pi a^2h}{3}$. **B.** $V=3\pi a^2h$. **C.** $V=\dfrac{\pi a^2h}{9}$. **D.** $V=\pi a^2h$.

Câu 48. Cho $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=2$, khi đó $I=\int\limits_1^4\dfrac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 49. Mệnh đề nào dưới đây **SAI**?

A. Hai khối hộp chữ nhật có diện tích toàn phần bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.

B. Hai khối chóp có diện tích đáy và chiều cao tương ứng bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.

C. Hai khối lập phương có diện tích toàn phần bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.

D. Hai khối lăng trụ có diện tích đáy và chiều cao tương ứng bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.

Câu 50. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận ngang?

A. $y=\frac{x^3+1}{x^2+1}$. **B.** $y=\frac{3x^2+2x-1}{4x^2+5}$. **C.** $y=x^3-x-1$. **D.** $y=\sqrt{2x^2+3}$

.

ꕥ HẾT ꕥ

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.D	3.B	4.D	5.B	6.A	7.D	8.C	9.D	10.D
11.C	12.D	13.D	14.C	15.D	16.B	17.B	18.B	19.B	20.B
21.D	22.D	23.C	24.A	25.B	26.C	27.B	28.D	29.C	30.A
31.A	32.A	33.B	34.	35.D	36.D	37.B	38.C	39.D	40.D
41.C	42.B	43.C	44.D	45.C	46.A	47.A	48.B	49.A	50.B

GIẢI CHI TIẾT ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TỈNH BẮC NINH
NĂM HỌC 2018-2019
MÔN: TOÁN 12
TIME: 90 PHÚT

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{-3}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$. Gọi M là giao điểm của Δ với mặt phẳng $(P): x+2y-3z+2=0$. Tọa độ của điểm M là

A. $(5;-1;-3)$. **B.** $(-1;1;1)$. **C.** $(2;0;-1)$. **D.** $(1;0;1)$.

Lời giải

Tác giả: Vũ Hoàng Anh; Fb: Vũ Hoàng Anh

Chọn B

Phương trình tham số của đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x=2-3t \\ y=t \\ z=-1+2t \end{cases}$

Vì M thuộc Δ nên $M(2-3t;\, t;\, -1+2t)$

Mặt khác M thuộc mặt phẳng (P) nên: $2-3t+2t-3(-1+2t)+2=0 \Leftrightarrow t=1$

Vậy điểm $M(-1;1;1)$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x}$ có đồ thị (C). Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị (C) là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Bá Đại; Fb: Nguyễn Bá Đại

Chọn D

Tập xác định của hàm số là $D=[-2;2]\setminus\{0\}$ nên đồ thị không có tiệm cận ngang.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x}=-\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x}=+\infty$ nên $x=0$ là tiệm cận đứng. Vậy đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng.

Câu 3. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos 3x-\cos 2x+9\sin x-4=0$ trên khoảng $(0;3\pi)$ là:

A. $\dfrac{25\pi}{6}$. **B.** 6π. **C.** $\dfrac{11\pi}{3}$. **D.** 5π.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thanh Long; Fb: Nguyễn Thanh Long

Chọn B

☑ $\cos 3x-\cos 2x+9\sin x-4=0$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 x-3\cos x-\left(1-2\sin^2 x\right)+9\sin x-4=0$

$\Leftrightarrow \cos x\left(4\cos^2 x-3\right)+2\sin^2 x+9\sin x-5=0$

$\Leftrightarrow \cos x\left[4\left(1-\sin^2 x\right)-3\right]+(2\sin x-1)(\sin x+5)=0$

$\Leftrightarrow \cos x\left(1-4\sin^2 x\right)+(2\sin x-1)(\sin x+5)=0$

$\Leftrightarrow \cos x(1-2\sin x)(1+2\sin x)-(1-2\sin x)(\sin x+5)=0$

$\Leftrightarrow (1-2\sin x)\left[\cos x(1+2\sin x)-(\sin x+5)\right]=0$

$\Leftrightarrow (1-2\sin x)(\cos x+2\sin x\cos x-\sin x-5)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-2\sin x=0\\ \cos x+2\sin x\cos x-\sin x-5=0\end{array}\right.$

☑ Với $1-2\sin x=0\Leftrightarrow \sin x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \sin x=\sin\dfrac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\pi-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

☑ Với $\cos x+2\sin x\cos x-\sin x-5=0\Leftrightarrow \sin x-\cos x=\sin 2x-5$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2x-5$

Ta có đánh giá sau $\begin{cases}\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right],\forall x\in(0;3\pi)\\ \sin 2x-5\in[-6;-4],\forall x\in(0;3\pi)\end{cases}$

Suy ra $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\neq\sin 2x-5,\forall x\in(0;3\pi)$.

Vậy phương trình này vô nghiệm.

☑ Trong khoảng $(0;3\pi)$, phương trình có tập nghiệm: $S=\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6};\frac{13\pi}{6};\frac{17\pi}{6}\right\}$

Suy ra tổng các nghiệm trong khoảng $(0;3\pi)$ của phương trình là 6π.

Câu 4. Cho $a>1$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng?**

A. $\frac{1}{a^{2016}}<\frac{1}{a^{2017}}$. **B.** $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}>1$. **C.** $a^{\frac{1}{3}}>\sqrt{a}$. **D.** $a^{-\sqrt{3}}>\frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Chí Thành; Fb: Nguyễn Chí Thành

Chọn D

Vì $a>1$ nên $a^{-\sqrt{3}}>a^{-\sqrt{5}}\Leftrightarrow a^{-\sqrt{3}}>\frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ thỏa mãn

$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[f^2(x)-2f(x)(3-x)\right]dx=-\frac{109}{12}$. Tính $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{x^2-1}dx$.

A. $\ln\frac{7}{9}$. **B.** $\ln\frac{2}{9}$. **C.** $\ln\frac{5}{9}$. **D.** $\ln\frac{8}{9}$.

Lời giải

Tác giả: Lê Phương; Fb: lephuongtt1

Chọn B

Ta có $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(3-x)^2dx=-\frac{(3-x)^3}{3}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{109}{12}$.

Do đó $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[f^2(x)-2f(x)(3-x)+(3-x)^2\right]dx=0$.

Hay $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[f(x)-(3-x)\right]^2dx=0$.

Suy ra $f(x)=3-x\ \ \forall x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

Khi đó $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{x^2-1}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{3-x}{x^2-1}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-1}dx-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2}{x+1}dx=\ln\frac{2}{9}$.

Câu 6. Tập xác định của hàm số $y=\left(4-3x-x^2\right)^{-2019}$ là:

A. $\mathbb{R}\setminus\{-4;1\}$. **B.** $[-4;1]$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(-4;1)$.

Lời giải

Tác giả: Bùi Thị Ngân; Fb: Ngân Bùi

Chọn A

Điều kiện xác định: $4-3x-x^2\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -4\\ x\neq 1\end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{-4;1\}$.

Câu 7. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Kẻ OH vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại H. Khẳng định nào sau đây **sai**?

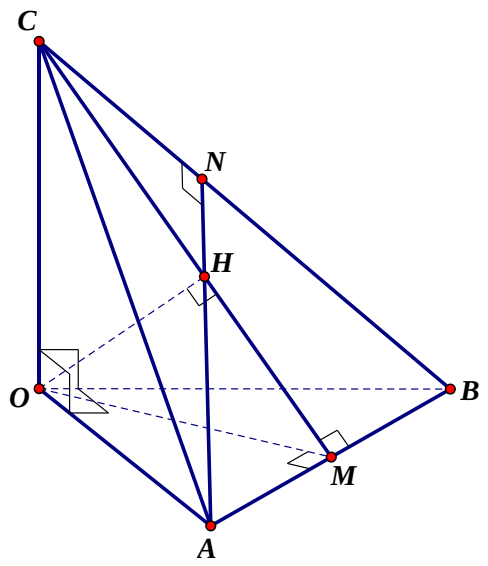
A. $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$. **B.** $OA\perp BC$.

C. H là trực tâm tam giác ABC. **D.** $AH\perp(OBC)$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Mạnh Hùng; Fb: Nguyễn Mạnh Hùng

Chọn D



Gọi M là giao của CH và AB. Gọi N là giao điểm của AH và CB. Ta có tam giác COM vuông tại O.

$\begin{cases} AB \perp OH \\ AB \perp OC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (COM)$. Suy ra OM là đường cao tam giác OBA.

Ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OM^2}$. Mà $\frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ nên $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

Do đó mệnh đề ở **A.** là đúng.

Ta có $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp BC$. Do đó mệnh đề ở **B.** là đúng.

Theo chứng minh trên ta có $CH \perp AB$. Tương tự, ta có $AH \perp BC$. Suy ra H là trực tâm tam giác ABC. Do đó mệnh đề ở **C.** đúng.

Vậy chọn đáp án **D.**

Câu 8. Cho phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x - \sqrt{m + \log_2 x} = m$ (*). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2019; 2019]$ để phương trình (*) có nghiệm?

A. 2020. **B.** 2019. **C.** 2021. **D.** 4038.

Lời giải

Tác giả: Phạm Thị Thu Hà; Fb: Phạm Thị Thu Hà

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x + m \geq 0 \end{cases}$.

Phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x - \sqrt{m + \log_2 x} = m$ (*)

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x - \log_2 x = m + \log_2 x + \sqrt{m + \log_2 x}$$

$$\Leftrightarrow \left(\log_2 x - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{m + \log_2 x} + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x - \frac{1}{2} = \sqrt{m + \log_2 x} + \frac{1}{2} \\ \log_2 x - \frac{1}{2} = -\sqrt{m + \log_2 x} - \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \log_2 x - 1 = \sqrt{m + \log_2 x} & (1) \\ -\log_2 x = \sqrt{m + \log_2 x} & (2) \end{array}\right.$$

a) Trường hợp (1):

Điều kiện: $\log_2 x \geq 1$. Khi đó

$(1) \Leftrightarrow (\log_2 x - 1)^2 = m + \log_2 x \Leftrightarrow m = \log_2^2 x - 3\log_2 x + 1$.

Đặt $t = \log_2 x, t \geq 1$. Ta có: $m = f(t) = t^2 - 3t + 1, t \geq 0$.

$f'(t) = 2t - 3$ nên $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2}$.

Bảng biến thiên

t	1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	-1	$\searrow$	$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Trường hợp này để có nghiệm thì $-\frac{5}{4} \leq m \leq -1$.

b) Trường hợp (2):

Điều kiện $-\log_2 x \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$.

Khi đó $(2) \Leftrightarrow m = \log_2^2 x - \log_2 x$

Đặt $u = \log_2 x, u \leq 0$

Phương trình (1) có dạng: $m = u^2 - u$

Xét hàm $g(u) = u^2 - u$ trên $(-\infty; 0] \Rightarrow g'(u) = 2u - 1$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(u) = u^2 - u$ trên $(-\infty; 0]$

x	$-\infty$		0
y'		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra điều kiện để pt (1) có nghiệm trên $(-\infty;0]$ là $m \geq 0$.

Kết hợp điều kiện m nguyên thuộc $[-2019;2019]$ ta có $m=-1$ **hoặc** $0 \leq m \leq 2019$.

Vậy có 2021 giá trị m nguyên thỏa mãn. Đáp án đúng là đáp án C.

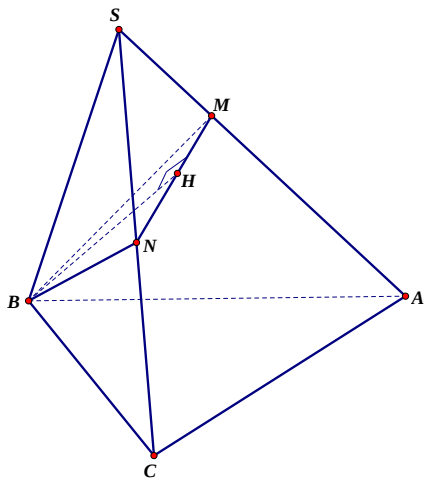
Câu 9. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA=6$, $SB=2$, $SC=4$, $AB=2\sqrt{10}$ và $SBC=90°$, $ASC=120°$. Mặt phẳng (P) đi qua B và trung điểm N của SC và vuông góc với mặt phẳng (SAC) cắt cạnh SA tại M. Tính tỉ số thể tích $\frac{V_{S.MBN}}{V_{S.ABC}}$.

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{2}{9}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Tác giả: Trương Thanh Tùng; Fb: Trương Thanh Tùng

Chọn D



Ta có: $\frac{V_{S.MBN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SC} = \frac{1}{2}k,\ k = \frac{SM}{SA}$. Áp dụng định lí cosin ta có:

$BSC=60°$, $ASC=120°$, $ASB=90°$.

Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a},\ \overrightarrow{SB}=\vec{b},\ \overrightarrow{SC}=\vec{c} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{a}|=6,\ |\vec{b}|=2, |\vec{c}|=4 \\ \vec{a}.\vec{b}=0,\ \vec{b}.\vec{c}=4, \vec{c}.\vec{a}=-12 \end{cases}$.

Kẻ $BH \perp MN \Rightarrow BH \perp (ASC)$.

Khi đó $\overrightarrow{BH}=x\overrightarrow{BM}+(1-x)\overrightarrow{BN}=x\left(\overrightarrow{SM}-\overrightarrow{SB}\right)+(1-x)\left(\overrightarrow{SN}-\overrightarrow{SB}\right)$

$=x\left(k\vec{a}-\vec{b}\right)+(1-x)\left(\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{b}\right)=kx.\vec{a}-\vec{b}+\frac{1-x}{2}.\vec{c}$

Mặt khác, $BH\perp(ASC)\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{SA}=0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{SC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}36kx-6(1-x)=0\\ -12kx-4+8(1-x)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\frac{1}{3}\\ x=\frac{1}{3}\end{cases}$.

Vậy $\frac{V_{S.MBN}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SC}=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

Câu 10. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn: $u_1=1,u_2=11,u_3=111,...,u_n=11...1$ (n chữ số 1, $n\in\mathbb{N}^*$). Đặt $S_n=u_1+u_2+...+u_n$. Giá trị của S_{2019} bằng

A. $\frac{1}{9}\left(\frac{10^{2012}-10}{9}+2019\right)$.

B. $\frac{10}{9}\left(10^{2019}-1\right)+2019$.

C. $\frac{1}{9}\left(10^{2019}-1\right)$.

D. $\frac{1}{9}\left(\frac{10^{2020}-10}{9}-2019\right)$.

Lời giải

Tác giả: Trịnh Thị Ánh Ngọc; Fb: Ngọc Trịnh

Chọn D

Nhận xét:

$u_1=1=10.0+1;u_2=11=10.1+1=10.u_1+1;u_3=111=10.11+1=10.u_2+1$

....

$u_{n+1}=11...1=10.u_n+1$

$\Rightarrow u_{n+1}+\frac{1}{9}=10.u_n+\frac{10}{9}=10.\left(u_n+\frac{1}{9}\right)$.

Khi đó ta đặt: $v_n=u_n+\frac{1}{9}$ ta được dãy số (v_n): $\begin{cases}v_1=\frac{10}{9}\\ v_{n+1}=10.v_n\end{cases}$ là CSN có số hạng đầu:

$v_1=\frac{10}{9}$, công bội: $q=10$

Tổng n số hạng đầu của dãy (v_n) là: $S'_n=u_1.\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{10}{9}.\frac{10^n-1}{9}$.

Suy ra tổng n số hạng đầu của dãy (u_n) là: $S_n=\frac{10}{9}.\frac{10^n-1}{9}-n.\frac{1}{9}=\frac{1}{9}.\left(\frac{10^n-10}{9}-n\right)$

Khi đó, $S_{2019}=\frac{1}{9}.\left(\frac{10^{2020}-10}{9}-2019\right)$.

Cách 2:

Tác giả: Nguyễn Trung Kiên; Fb: Nguyễn Trung Kiên.

$9S_{2019}=9+99+...+99...9$ (2019 chữ số 9) $=(10-1)+(10^2-1)+...+(10^{2019}-1)$

$$=(10+10^2+...+10^{2019})-2019=10\cdot\frac{1-10^{2019}}{1-10}-2019=\frac{10^{2020}-10}{9}-2019.$$

Do đó, $S_{2019}=\frac{1}{9}\left[\frac{10^{2020}-10}{9}-2019\right]$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(2;m-1;3)$, $\vec{b}=(1;3;-2n)$. Tìm m, n để các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng.

A. $m=7$; $n=-\frac{4}{3}$.

B. $m=1$; $n=0$.

C. $m=7$; $n=-\frac{3}{4}$.

D. $m=4$; $n=-3$.

Lời giải

Tác giả: Phạm Văn Mạnh; Fb: Phạm Văn Mạnh

Chọn C

Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng khi: $\frac{2}{1}=\frac{m-1}{3}=\frac{3}{-2n}>0\Leftrightarrow\begin{cases}m=7\\n=-\frac{3}{4}\end{cases}$.

Câu 12. Cho $T(x)=\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^{20}+\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{22}$ $(x\neq 0)$. Sau khi khai triển và rút gọn $T(x)$ có bao nhiêu số hạng?

A. 36.

B. 39.

C. 44.

D. 38.

Lời giải

Tác giả: Bùi Đức Thắng; Fb: Đức Thắng

Chọn D

$$T(x)=\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^{20}+\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{22}=\sum_{k=0}^{20}C_{20}^k\left(x^3\right)^{20-k}.\frac{1}{x^k}+\sum_{k=0}^{22}C_{22}^k x^{22-k}.\left(\frac{1}{x^2}\right)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{20}C_{20}^k x^{60-4k}+\sum_{k=0}^{22}C_{22}^k x^{22-3k}=T_1+T_2$$

Số các số hạng của $T(x)$ chính là số các số mũ khác nhau của x.

Trong T_1 số mũ của x là các bội của 4 trong đoạn $[-20,60]$.

Trong T_2 dễ thấy số mũ của x là các số:
$22;19;16;13;10;7;4;1;-2;-5;-8;-11;-14;-17;-20;\ldots$.

Dễ thấy có 4 số mũ trùng nhau của T_1 và T_2 là $16;4;-8;-20$.

Vậy số số hạng trong $T(x)$ là $20+22-4=38$.

Chọn D.

Câu 13. Cho x, y là hai số thực dương khác 1 và α, β là hai số thực tùy ý. Mệnh đề nào sau đây **SAI**?

A. $\frac{x^\alpha}{y^\alpha}=\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha$. **B.** $x^\alpha.x^\beta=x^{\alpha+\beta}$. **C.** $x^\alpha.y^\alpha=(xy)^\alpha$. **D.** $\frac{x^\alpha}{y^\beta}=\left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha-\beta}$.

Lời giải

Tác giả: Đặng Thị Ngọc Bích; Fb:Cô Bích Toán ĐHT

Chọn D

Dễ thấy câu D.

Câu 14. Cho hàm số $y=ax^3+cx+d$, $a\neq 0$ có $\min\limits_{(-\infty;0)} f(x)=f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ bằng

B. $d+2a$. **B.** $d+8a$. **C.** $d-16a$. **D.** $d-11a$.

Lời giải

Tác giả: Bùi Thị Phương Thảo; Fb: Phuong Thao Bui

Chọn C

Ta có $y'=3ax^2+c\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow 3ax^2+c=0\Leftrightarrow x^2=-\frac{c}{3a}$.

Do $\min\limits_{(-\infty;0)} f(x) = f(-2)$ nên phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -2$; $x_2 = 2$

với $a < 0$, $-\dfrac{c}{3a} > 0$ và $-\sqrt{\dfrac{-c}{3a}} = -2 \Rightarrow c = -12a$.

x_1 là điểm cực tiểu của hàm số và x_2 là điểm cực đại của hàm số.

Khi đó $\max\limits_{[1;3]} f(x) = f(2) = 8a + 2c + d = d - 16a$.

Câu 15. Cho hàm số $y = (m-3)x - 2m + 1$ có đồ thị là đường thẳng d. Gọi S là tập các giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt trục Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB cân. Số tập con của tập S là

A. 3. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Hương Thơm; Fb: Thom Nguyen

Chọn D

+) Do đường thẳng d cắt trục Ox, Oy tại hai điểm A, B tạo thành một tam giác nên $m \neq 3$ và $m \neq \dfrac{1}{2}$. Với điều kiện đó ta có

+) d cắt trục Ox tại điểm $A\left(\dfrac{2m-1}{m-3}; 0\right)$

+) d cắt trục Oy tại điểm $B(0; -2m+1)$

+) Tam giác OAB cân nên $OA = OB$.

+) $OA = OB \Rightarrow \left|\dfrac{2m-1}{m-3}\right| = |-2m+1| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} |2m-1| = 0 \\ |m-3| = 1 \end{array}\right.$

+) $|2m-1| = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$ (loại)

+) $|m-3| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-3 = 1 \\ m-3 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = 2 \end{array}\right.$

Vậy $S = \{2; 4\}$ nên số tập con của S là 4.

Cách 2:

Tác giả: Nguyễn Trung Kiên; Fb: Nguyễn Trung Kiên.

Để đường thẳng d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B để tam giác OAB cân tại O (do tam giác OAB vuông tại O) thì nó song song với một trong hai đường phân giác của hệ trục tọa độ. $\begin{cases} |m-3|=1 \\ 2m-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=4 \end{array}\right.$.

$S=\{2;4\}$ nên có $2^2=4$ tập con.

Câu 16. Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+x\right)=5$. Khi đó giá trị a là

A. 10. **B.** -10. **C.** -6. **D.** 6.

Lời giải

Tác giả: Trần Vinh; Fb: Vinh Trần

Chọn B

Đặt $t=-x$, ta có

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+x\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{t^2-at+5}-t\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{-at+5}{\sqrt{t^2-at+5}+t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{-a+\frac{5}{t}}{\sqrt{1-\frac{a}{t}+\frac{5}{t^2}}+1}$$

$$=\frac{-a}{2}$$

Theo giả thiết $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+x\right)=5 \Leftrightarrow \frac{-a}{2}=5 \Leftrightarrow a=-10$.

Câu 17. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

A. $S=\ln 2-1$. **B.** $S=2\ln 2-1$. **C.** $S=2\ln 2+1$. **D.** $S=\ln 2+1$.

Lời giải

Tác giả: Bùi Thị Dung; Fb: Bui Thi Dung

Chọn B

- Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ và trục Ox:

$$\frac{x-1}{x+1}=0 \Leftrightarrow x=1$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$, trục Ox và trục Oy là:

$$S=\int_0^1\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx=-\int_0^1\frac{x-1}{x+1}dx=-\int_0^1\left(1-\frac{2}{x+1}\right)dx=\int_0^1\left(\frac{2}{x+1}-1\right)dx=\left[2\ln|x+1|-x\right]\Big|_0^1$$

$=2\ln 2-1$

Câu 18. Cho hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\xy+yz+zx=-3\\x^6+y^6+z^6=m\end{cases}$ với x, y, z là ẩn số thực, m là tham số. Số giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm là

A. 24. **B.** 13. **C.** 12. **D.** 25.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Bá Long; Fb: Nguyễn Bá Long

Chọn B

Sử dụng hằng đẳng thức $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

Ta có, $x^6+y^6+z^6-3(xyz)^2=(x^2+y^2+z^2)(x^4+y^4+z^4-x^2y^2-y^2z^2-z^2x^2)$

$\Leftrightarrow x^6+y^6+z^6-3(xyz)^2=(x^2+y^2+z^2)\left[(x^2+y^2+z^2)^2-3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\right]$

$\Leftrightarrow m-3(xyz)^2=6\left[36-3(xy+yz+zx)^2+6xyz(x+y+z)\right]$

$\Leftrightarrow m-3(xyz)^2=6\left[9+6xyz(x+y+z)\right]\qquad(1)$

Ta có: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\xy+yz+zx=-3\\x^6+y^6+z^6=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\2xy+2yz+2zx=-6\\x^6+y^6+z^6=m\end{cases}\Rightarrow(x+y+z)^2=0\Leftrightarrow x+y+z=0$

Do đó từ (1) ta được $(xyz)^2=\dfrac{m-54}{3}$

Như vậy $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\xy+yz+zx=-3\\x^6+y^6+z^6=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=0\\xy+yz+zx=-3\\(xyz)^2=\dfrac{m-54}{3}\end{cases}(2)$

* **Trường hợp 1:** $m=54$ khi đó $xyz=0$ ta được $x=0$ hoặc $y=0$ hoặc $z=0$

Với $x=0$ ta được $\begin{cases} y+z=0 \\ yz=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=-\sqrt{3} \\ z=\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} y=\sqrt{3} \\ z=-\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right.$

Hệ có nghiệm là $\left(0;-\sqrt{3};\sqrt{3}\right),\left(0;\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)$

Các khả năng $y=0$ hoặc $z=0$ cũng tương tự như khả năng $x=0$

Tức là $m=54$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

* **Trường hợp 2:** Xét nghiệm của hệ có dạng $(x;x;z)$ với $x\neq z$. Khi đó hệ (2) trở thành

$$\begin{cases} 2x+z=0 \\ x^2+2xz=-3 \\ x^4z^2=\dfrac{m-54}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2x \\ x^2=1 \\ x^4z^2=\dfrac{m-54}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2x \\ x^2=1 \\ 4x^6=\dfrac{m-54}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{m-54}{3}=4 \Leftrightarrow m=66$$

Các khả năng nghiệm của hệ có dạng $(z;x;x)$ và $(x;z;x)$ với $x\neq z$ cũng tương tự như khả năng $(x;x;z)$.

Tức là $m=66$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dế nhận thấy hệ (2) không thể có nghiệm dạng $(x;x;x)$

* **Trường hợp 3:** Nghiệm của hệ có dạng $(x;y;z)$ với $x\neq y\neq z$

Khi đó với $m>54$ hệ (2) trở thành $\begin{cases} x+y+z=0 \\ xy+yz+zx=-3 \\ xyz=\pm\sqrt{\dfrac{m-54}{3}}=k \end{cases}$ với $k=\pm\sqrt{\dfrac{m-54}{3}}$

Áp dụng định lí đảo của định lí Vi-et với phương trình bậc 3 ta được $x;y;z$ là 3 nghiệm của phương trình $t^3-3t-k=0 \Leftrightarrow t^3-3t=k$

Xét hàm số $f(t)=t^3-3t$, ta phải có $f_{CT}(t)<k<f_{CD}(t) \Leftrightarrow -2<k<2$

Do đó $-2<\pm\sqrt{\dfrac{m-54}{3}}<2 \Leftrightarrow 54<m<66$, vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{55;56;...;65\}$, có 11 số

Kết hợp các trường hợp trên ta được 13 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cụ thể $m\in\{54;55;...;66\}$.

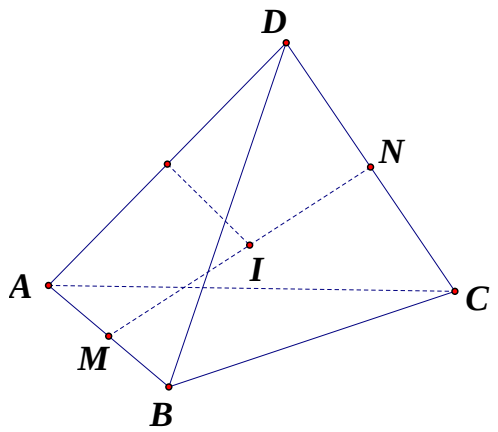
Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6a$; $CD = 8a$ và các cạnh còn lại bằng $a\sqrt{74}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $S = 96\pi a^2$. **B.** $S = 100\pi a^2$. **C.** $S = 25\pi a^2$. **D.** $S = \frac{100}{3}\pi a^2$.

Lời giải

Tác giả: Đỗ Tấn Lộc; Fb: Do Tan Loc

Chọn B



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD ta có: $\Delta DCA = \Delta DBC \Rightarrow AN = BN$

Suy ra MN là trung trực của AB, tương tự MN là trung trực của DC

Khi đó $I \in MN$ sao cho $ID = IA$

Lại có $AN = \sqrt{AD^2 - DN^2} = a\sqrt{58} \Rightarrow MN = \sqrt{AN^2 - AM^2} = 7a$

Mặt khác $IM + IN = \sqrt{R^2 - AM^2} + \sqrt{R^2 - DN^2} = \sqrt{R^2 - 9a^2} + \sqrt{R^2 - 16a^2} = 7a$

$\Rightarrow R = 5$

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là $S = 100\pi a^2$.

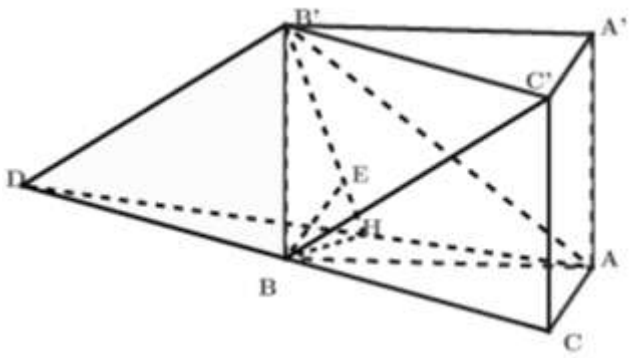
Câu 20. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân, $AB = AC = a$, $AA' = h$ $(a,\ h > 0)$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB' và BC' theo $a,\ h$.

A. $\frac{ah}{\sqrt{5a^2 + h^2}}$. **B.** $\frac{ah}{\sqrt{a^2 + 5h^2}}$. **C.** $\frac{ah}{\sqrt{a^2 + h^2}}$. **D.** $\frac{ah}{\sqrt{2a^2 + h^2}}$.

Lời giải

Tác giả: Việt Hưng; Fb: VietHung

Chọn B



Gọi D là điểm đối xứng với C qua $B \Rightarrow BC' // DB'$

$\Rightarrow BC' // (DB'A) \Rightarrow d(BC';AB') = d(BC';(DB'A)) = d(B;(DB'A)) = d$

Kẻ $BH \perp AD$ và $BE \perp B'H \Rightarrow d(BC';AB') = d = BE$

Xét ΔABD ta có: $AB = AC = a;\ BC = BD = a\sqrt{2};\ ABC = 45° \Rightarrow DBA = 135°$; $AD = a\sqrt{5}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}BD.AB.\sin DBA = \frac{1}{2}a\sqrt{2}.a.\sin 135° = \frac{a^2}{2} \Rightarrow BH = \frac{2.S_{\Delta ABD}}{AD} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$

Xét $\Delta BB'H$ vuông tại B, ta có $\frac{1}{d^2} = \frac{1}{(BB')^2} + \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{5}{a^2} \Rightarrow d = \frac{ah}{\sqrt{a^2+5h^2}}$

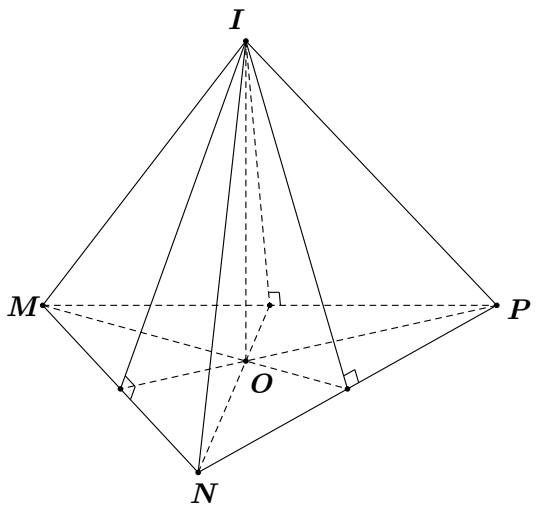
Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(6;0;0)$, $N(0;6;0)$, $P(0;0;6)$. Hai mặt cầu có phương trình $(S_1): x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0$ và $(S_2): x^2+y^2+z^2-8x+2y+2z+1=0$ cắt nhau theo đường tròn (C). Hỏi có bao nhiêu mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa (C) và tiếp xúc với ba đường thẳng MN, NP, PM?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Nguyên Chương; Fb: Nguyễn Chương

Chọn D



Gọi (α) là mặt phẳng chứa (C) và I là tâm mặt cầu cần tìm.

Trừ theo vế hai phương trình mặt cầu ta được $(\alpha): 6x-4y-2z=0 \Leftrightarrow 3x-2y-z=0$.

Mặt cầu tiếp xúc với ba cạnh của tam giác MNP suy ra tâm mặt cầu thuộc đường thẳng vuông góc với (MNP) và đi qua tâm đường tròn nội tiếp hoặc bàng tiếp tam giác MNP.

Dễ thấy $(\alpha)\perp(MNP)$ và (α) qua $J(2;2;2)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đều MNP nên I thuộc đường thẳng qua J và vuông góc (MNP).

Vậy có vô số mặt cầu thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 22. Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Xét các mệnh đề sau

1) $k.\int f(x)\mathrm{d}x=\int k.f(x)\mathrm{d}x$ với k là hằng số bất kì.

2) $\int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x$.

3) $\int[f(x).g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x.\int g(x)\mathrm{d}x$.

4) $\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x+\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x=f(x).g(x)$.

Tổng số mệnh đề **đúng** là:

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Tác giả: Phạm Văn Mạnh; Fb: Phạm Văn Mạnh

Chọn D

Ta có mệnh đề đúng là mệnh đề số 2. Mệnh đề này đúng theo tính chất cơ bản của nguyên hàm.

Mệnh đề số 1 sai khi $k=0$.

Mệnh đề số 3 sai về tính chất của nguyên hàm.

Mệnh đề số 4 sai vì $\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x+\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x=f(x).g(x)+C$.

Câu 23. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{4}}(x+1)>\log_{\frac{\pi}{4}}(2x-5)$ là

A. $\left(\frac{5}{2};6\right)$. **B.** $(-\infty;6)$. **C.** $(6;+\infty)$. **D.** $(-1;6)$.

Lời giải

Tác giả: Minh Anh; Fb: Nguyễn Thị Minh Anh.

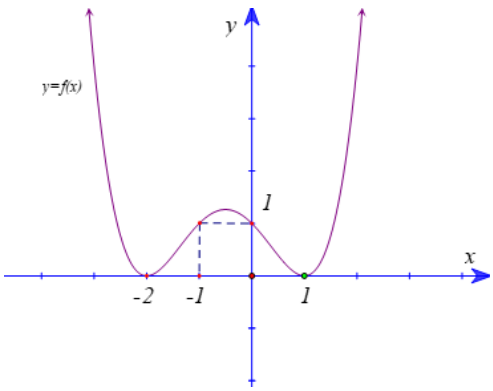
Chọn C

Điều kiện: $x>\frac{5}{2}$.

Bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{4}}(x+1)>\log_{\frac{\pi}{4}}(2x-5)\Rightarrow x+1<2x-5\Leftrightarrow x>6$.

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow x\in(6;+\infty)$.

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x);y=f'(x)$ có diện tích bằng



A. $\frac{127}{40}$. **B.** $\frac{107}{5}$. **C.** $\frac{13}{5}$. **D.** $\frac{127}{10}$.

Lời giải

Tác giả: Hồ Bình Minh; Fb: Hồ Bình Minh

Chọn A

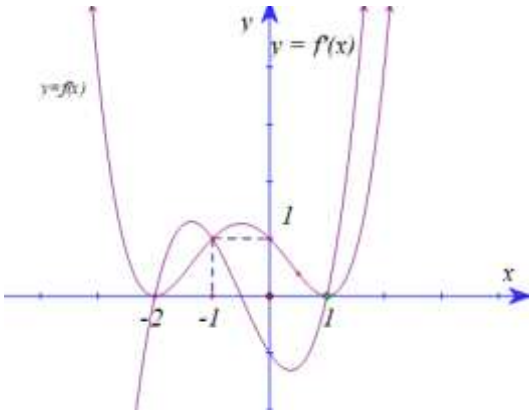
Đặt $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R},a\neq 0)$.

Khi đó $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$.

Theo hình vẽ ta thấy đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua các điểm $(-2;0)$, $(-1;1)$, $(0;1)$, $(1;0)$ và $f'(1)=0$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases}16a-8b+4c-2d+e=0\\ a-b+c-d+e=1\\ e=1\\ a+b+c+d+e=0\\ 4a+3b+2c+d=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{1}{4}\\ b=\dfrac{1}{2}\\ c=-\dfrac{3}{4}\\ d=-1\\ e=1\end{cases}$$

Xét phương trình $f(x)=f'(x)$ dễ thấy phương trình có ba nghiệm -2; -1; 1.



Vậy hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của $f(x)$ và $f'(x)$ là:

$$S=-\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2\right)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2\right)\mathrm{d}x=\frac{127}{40}.$$

Câu 25. Biết đường thẳng $y=x-2$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A và B có hoành độ x_A, x_B. Giá trị của biểu thức x_A+x_B bằng:

A. 2. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Liêu; Fb: Nguyen Lieu

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x+1}{x-1}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 1\\ 2x^2-5x+1=0\ (1)\end{cases}$.

Ta thấy (1) luôn có hai nghiệm phân biệt khác 1, áp dụng định lý Vi-et ta có $x_A+x_B=5$.

Câu 26. Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{m^2-x^2}$ (m là tham số khác 0) và trục hoành. Khi (H) quay quanh trục hoành ta được khối tròn xoay có thể tích là V . Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $V<1000\pi$.

A. 19. **B.** 20. **C.** 18. **D.21**.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Lan Anh; Fb: Lan Anh

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{m^2-x^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=-m \end{array}\right.$

TH1: $m \geq 0$

$$V=\pi \int_{-m}^{m}(\sqrt{m^2-x^2})^2 dx=\pi \int_{-m}^{m}(m^2-x^2)dx=\frac{4}{3}\pi m^3 .$$

mà $0<V<1000\pi \Leftrightarrow 0<\frac{4}{3}\pi m^3<1000\pi \Leftrightarrow 0<m<9,086 \Rightarrow$ có 9 giá trị nguyên m .

TH2: $m<0$

$$V=\pi \int_{m}^{-m}(\sqrt{m^2-x^2})^2 dx=\pi \int_{m}^{-m}(m^2-x^2)dx=-\frac{4}{3}\pi m^3 .$$

mà $0<V<1000\pi \Leftrightarrow 0<-\frac{4}{3}\pi m^3<1000\pi \Leftrightarrow 0>m>-9,086 \Rightarrow$ có 9 giá trị nguyên m .

Vậy 18 giá trị nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

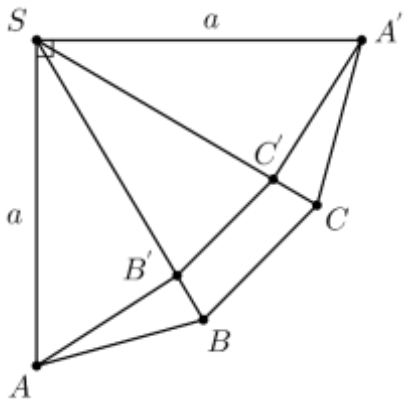
Câu 27. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=a$ và $ASB=BSC=CSA=30°$. Mặt phẳng (α) bất kì qua A cắt SB , SC tại B' , C' . Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi $\Delta AB'C'$.

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** a . **D.** $2a$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Trung Kiên – Triệu Minh

Chọn B



Trãi các tam giác SAB, SBC, SCA trên một mặt phẳng như hình trên. Tam giác SAC trở thành tam giác $SA'C$. Khi đó $C = AB' + B'C' + C'A' \geq AA' = a\sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi A, B', C', A' thẳng hàng.

Vậy chu vi tam giác $\Delta AB'C'$ nhỏ nhất bằng $a\sqrt{2}$.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (1;1;-2)$, $\vec{v} = (1;0;m)$. Tìm tất cả các giá trị của m để góc giữa hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ bằng 45° .

A. $m = 2 \pm \sqrt{6}$. **B.** $m = 2 + \sqrt{6}$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 2 - \sqrt{6}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Hồng Nhung; Fb: Nguyễn Thị Hồng Nhung

Chọn D

Ta có: $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} \Leftrightarrow \cos(45^\circ) = \dfrac{1-2m}{\sqrt{6}.\sqrt{1+m^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \dfrac{1}{2} \\ -m^2 + 4m + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 - \sqrt{6}$.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $[f(1+2x)]^2 = x - [f(1-x)]^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

A. $y = -x + \dfrac{6}{7}$. **B.** $y = -\dfrac{1}{7}x + \dfrac{8}{7}$. **C.** $y = -\dfrac{1}{7}x - \dfrac{6}{7}$. **D.** $y = \dfrac{1}{7}x - \dfrac{8}{7}$.

Lời giải

Tác giả: Trần Vinh; Fb: Vinh Trần

Chọn C

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

Ta có $\left[f(1+2x)\right]^2 = x - \left[f(1-x)\right]^3 \Rightarrow 4f'(1+2x).f(1+2x) = 1+3f'(1-x).\left[f(1-x)\right]^2$

.

Suy ra $\begin{cases} \left[f(1)\right]^2 = 0 - \left[f(1)\right]^3 \\ 4f'(1).f(1) = 1+3f'(1).\left[f(1)\right]^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(1)=0 \\ f(1)=-1 \end{array}\right. \\ 4f'(1).f(1) = 1+3f'(1).\left[f(1)\right]^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(1)=0 \\ 4f'(1).f(1) = 1+3f'(1).\left[f(1)\right]^2 \end{cases} \\ \begin{cases} f(1)=-1 \\ 4f'(1).f(1) = 1+3f'(1).\left[f(1)\right]^2 \end{cases} \end{array}\right. (\text{vn}) \Leftrightarrow \begin{cases} f(1)=-1 \\ f'(1) = -\dfrac{1}{7} \end{cases}$

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

$y = -\dfrac{1}{7}(x-1) - 1$ hay $y = -\dfrac{1}{7}x - \dfrac{6}{7}$.

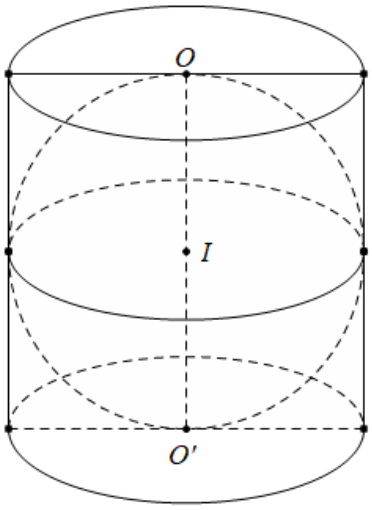
Câu 30. Cho hình trụ có bán kính đáy r. Gọi O và O' là tâm của hai đường tròn đáy với $OO' = 2r$. Một mặt cầu tiếp xúc với hai đáy của hình trụ tại O và O'. Gọi V_c và V_r lần lượt là thể tích của khối cầu và khối trụ. Khi đó $\dfrac{V_c}{V_t}$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{5}$.

Lời giải

Tác giả: Trần Vinh; Fb: Vinh Trần .

Chọn A



Ta có thể tích khối trụ là $V_t = \pi.r^2.OO' = 2\pi r^3$ (1)

Mặt cầu tiếp xúc với hai đáy của hình trụ nên mặt cầu có bán kình $R = \frac{1}{2}OO' = r$, suy ra thể tích khối cầu là $V_c = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\frac{V_c}{V_t} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi r^3} = \frac{2}{3}$.

Câu 31. Xét hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$ với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[1;3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a + 2b$.

A. -4. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Trung Kiên – Lê Minh Triều

Chọn A

$f(-1) = |1 - a + b|$; $f(0) = |b|$; $f(1) = |1 + a + b| = |-1 - a - b|$; $f(2) = |4 + 2a + b|$ và $f(3) = |9 + 3a + b|$

Ta có: $f(3) + f(-1) + 2f(1) \geq |(9 + 3a + b) + (1 - a + b) + 2(-1 - a - b)| = 8$

Vậy $4M \geq 8$ nên $M_{\min} = 2$ xảy ra khi $\begin{cases} 9 + 3a + b = 2 \\ 1 - a + b = 2 \\ -1 - a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$

Thử lại khi $a = -2; b = -1$, ta có

$f(x) = |x^2 - 2x - 1|$ trên đoạn $[-1;3]$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & \text{khi } x \in [-1; 1 - \sqrt{2}] \cup [1 + \sqrt{2}; 3] \\ -x^2 + 2x + 1 & \text{khi } x \in [1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}] \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{khi } x \in [-1; 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}; 3] \\ -2x + 2 & \text{khi } x \in (1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}) \end{cases}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f(-1)=2$; $f(1)=2$; $f(3)=2$; $f(1\pm\sqrt{2})=0$ (thỏa $M=2$).

Vậy $a+2b=-4$.

Cách 2:

Tác giả: Ngô Minh Ngọc Bảo; Fb: Ngô Minh Ngọc Bảo

Chọn C

Xét hàm số $y=f\ \ x\ =x^2$ trên đoạn $-1,3$.

Trên đồ thị hàm số $y=f\ \ x$ lấy hai điểm $A\ -1,1\ ,B\ \ 3,9\ \ .$

Phương trình đường thẳng AB là: $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-1}{8}\Leftrightarrow y=2x+3$.

Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f\ \ x$ song song với AB. Giả sử tiếp điểm của tiếp tuyến d là $M\ \ a,a^2\ \ $. Ta có: $2a=2\Leftrightarrow a=1$ (do $d\,//\,AB$).

Phương trình đường thẳng d là: $y=2\ \ x-1\ \ +1\Leftrightarrow y=2x-1$.

Đường thẳng $-ax-b$ là đường thẳng song song và cách đều hai đường thẳng d và AB, do đó:

$$\begin{cases}-a=2\\-b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=-1\end{cases}\Leftrightarrow a+2b=-2+2.\ -1\ \ =-4.$$

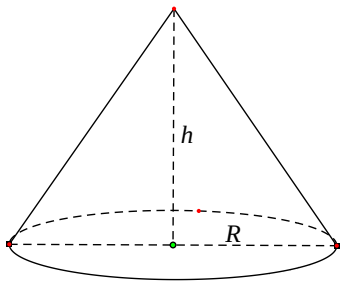
Câu 32. Thiết diện qua trục của một hình nón là tam giác đều cạnh có độ dài $2a$. Thể tích của khối nón là

A. $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Hồng Nhung; Fb: Nguyễn Thị Hồng Nhung

Chọn A



Gọi chiều cao và bán kính đáy của hình nón lần lượt là h và R.

Ta có $h=\frac{\sqrt{3}}{2}.2a=a\sqrt{3}$ và $R=\sqrt{(2a)^2-h^2}=\sqrt{(2a)^2-\left(a\sqrt{3}\right)^2}=a$.

Vậy thể tích của khối nón là $V=\frac{1}{3}.\pi R^2.h=\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 33. Cho các hàm số $f_0(x), f_1(x), f_2(x),...$ thỏa mãn:

$f_0(x)=\ln x+|\ln x-2019|-|\ln x+2019|$, $f_{n+1}(x)=|f_n(x)|-1, \forall n\in\mathbb{N}$.

Số nghiệm của phương trình là

A. 6063. **B.** 6059. **C.** 6057. **D.** 6058.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Trung Kiên – Trịnh Quang Hoàng.

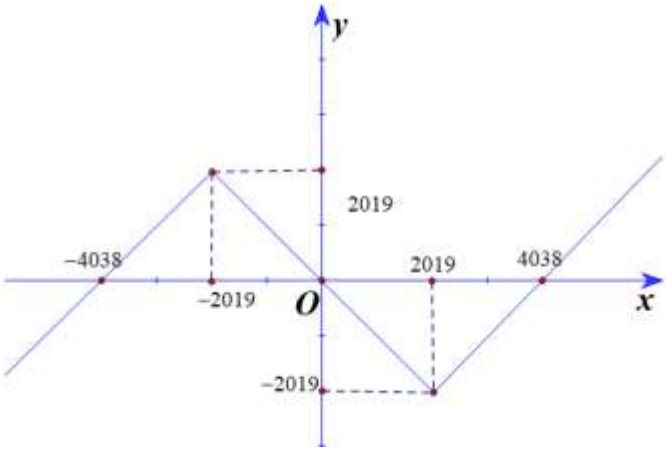
Chọn B

Xét hàm số $f_0(x)=\ln x+|\ln x-2019|-|\ln x+2019|$

Đặt $t=\ln x$, ta có

$f_0(x)=g(t)=t+|t-2019|-|t+2019|$

$$g(t)=\begin{cases} t+4038 & \text{khi} \quad t\le -2019 \\ -t & \text{khi} \quad -2019<t<2019 \\ t-4038 & \text{khi} \quad t\ge 2019 \end{cases}$$



$f_{n+1}(x)=|f_n(x)|-1\ge -1, \forall x>0; \forall n\in\mathbb{N}$

Có 3 trường hợp cần xét là

- Nếu $f_{n+1}(x)=-1\Leftrightarrow |f_n(x)|-1=-1\Leftrightarrow f_n(x)=0$.

- Nếu $f_{n+1}(x)=0 \Leftrightarrow |f_n(x)|-1=0 \Leftrightarrow |f_n(x)|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f_n(x)=-1 \\ f_n(x)=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f_{n-1}(x)=0 \\ f_{n-1}(x)=2 \end{array}\right.$.

- Nếu $f_{n+1}(x)=k>0 \Leftrightarrow f_n(x)=k+1$

Khi đó

$f_{2020}(x)=0 \Rightarrow f_{2018}(x)=0;2$

$\Rightarrow f_{2016}(x)=0;2;4$

$\Rightarrow f_{2014}(x)=0;2;4;6$

...

$\Rightarrow f_2(x)=0;2;4;...;2018$

$\Rightarrow f_1(x)=-1;1;3;5;...;2019$

$\Rightarrow |f_0(x)|=0;2;4;...;2020$

$\Rightarrow f_0(x)=0;\pm 2;\pm 4;...;\pm 2020$

Quan sát đồ thị ta thấy

Mỗi phương trình $f_0(x)=0;\pm 2;\pm 4;...;\pm 2018$ có 3 nghiệm.

Mỗi phương trình $f_0(x)=\pm 2020$ có 1 nghiệm

Vậy số nghiệm là: $2019.3+2=6059$.

Câu 34. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(x-3)^2=\frac{14}{3}$ và đường thẳng $d:\frac{x-4}{3}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-4}{1}$. Gọi $A(x_0;y_0;z_0)(x_0>0)$ là điểm nằm trên đường thẳng d sao cho từ A kẻ được ba tiếp tuyến đến mặt cầu (S) và các tiếp điểm B,C,D sao cho $ABCD$ là tứ diện đều .

Tính giá trị của $P=x_0+y_0+z_0$.

A. $P=8$. **B.** $P=6$. **C.** $P=16$. **D.** $P=12$.

Lời giải

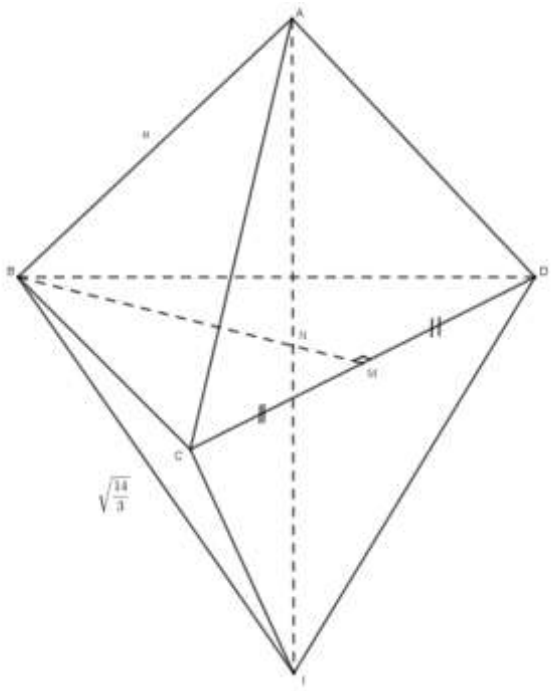
Tác giả: Đào Hải Nam – Bùi Quý Minh

Chọn D

(S) có tâm $I(1;2;3)$ bán kính $R=\sqrt{\frac{14}{3}}$.

Đặt $AB = a; BN = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin A_1 = \frac{BN}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Mặt khác $\sin A_1 = \frac{BI}{AI} \Rightarrow AI = \frac{BI}{\sin A_1} = \sqrt{14}$.



Giả sử điểm A có tọa độ $(4+3t; 4+2t; 4+t)$ và do $AI = \sqrt{14}$ nên ta có :

$$(4+3t-1)^2 + (4+2t-2)^2 + (4+t-3)^2 = 14.$$

$$\Rightarrow (t+1)^2 = 1.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -2 \end{array}\right..$$

Kết hợp với điều kiện điểm A có hoành độ dương nên ta nhận $t = 0 \Rightarrow A(4;4;4)$.

Chọn **D.**

Câu 35. Cho hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + x + 2m + 1$ có đồ thị (C) (m là tham số thực). Gọi m_1, m_2 là các giá trị của m để đường thẳng $d: y = x + m + 1$ cắt (C) tại ba điểm phân biết A, B, C sao cho tổng hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A, B, C bằng 19. Khi đó, $m_1 + m_2$ bằng

A. -4. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d là:

$x^3-(m+1)x^2+x+2m+1=x+m+1 \quad (1)$

$\Leftrightarrow x^3-(m+1)x^2+m=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-mx-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-mx-m=0 \end{array}\right.$

Đồ thị (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt A, B, C khi và chỉ khi phương trình (1) có 3 nghiệm phận biệt, khi đó phương trình $x^2-mx-m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

Do đó $\begin{cases} m\neq \dfrac{1}{2} \\ \Delta=m^2+4m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m\in(-\infty;-4)\cup\left(0;\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right) \quad (*)$

Không mất tính tổng quát, ta gọi $A(1;m+2)$, $B(x_1;x_1+m+1)$, $C(x_2;x_2+m+1)$

Khi đó, $x_1;x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2-mx-m=0$.

Do đó $\begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1x_2=-m \end{cases}$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại A,B,C với đồ thị (C) tương ứng là $y'(1)$, $y'(x_1)$, $y'(x_2)$

Với $y'=3x^2-2(m+1)x+1$

Theo giả thiết $y'(1)+y'(x_1)+y'(x_2)=19$, ta được

$4-2(m+1)+3x_1^2-2(m+1)x_1+1+3x_2^2-2(m+1)x_2+1=19$

$\Leftrightarrow 3(x_1+x_2)^2-6x_1x_2-2(m+1)(x_1+x_2)+6-2(m+1)=19 \quad (2)$

Thay $\begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1x_2=-m \end{cases}$ vào phương trình (2) ta được

$3m^2+6m-2m(m+1)-2m-15=0 \Leftrightarrow m^2+2m-15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-5 \\ m=3 \end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện $(*)$)

Vậy $m_1+m_2=-2$.

Câu 36. Biết $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x+\cos x)}{\cos^2 x}dx=\frac{a}{b}\ln 2+\frac{\pi}{c}$ với a, b, c là các số nguyên. Khi đó, $\dfrac{bc}{a}$ bằng

A. $\frac{8}{3}$. **B.** -6. **C.** 6. **D.** $-\frac{8}{3}$.

Lời giải

Tác giả: Đào Hải Nam; Fb: Dao Nam

Chọn D

Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln(\sin x + \cos x) \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} \\ v = \tan x + 1 \end{cases}$$

Ta có: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{\cos^2 x} dx = (\tan x + 1).\ln(\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}(\tan x + 1) dx$

$= (\tan x + 1).\ln(\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos x} dx$

$= (\tan x + 1).\ln(\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos x} dx$

$= (\tan x + 1).\ln(\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - (\ln\cos x + x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \left(2\ln\sqrt{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - (1.\ln 1 - \ln 1 - 0) = \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}$.

Do đó: $a = 3; b = 2; c = -4$, suy ra: $\frac{bc}{a} = -\frac{8}{3}$.

Câu 37. Một tổ học sinh có 7 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 người. Tính xác suất sao cho 2 người được chọn đều là nữ.

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{1}{15}$. **C.** $\frac{7}{15}$. **D.** $\frac{8}{15}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thanh Hùng; Fb: Hùng Nguyễn

Chọn B

Số cách chọn 2 người từ 10 người là: $C_{10}^2 = 45 \Rightarrow n(\Omega) = 45$.

Gọi A: "2 người được chọn đều là nữ".

Số cách chọn 2 học sinh nữ từ 3 học sinh nữ là: $C_3^2 = 3 \Rightarrow n(A) = 3$.

Vậy xác suất sao cho 2 người được chọn đều là nữ là: $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{3}{45}=\frac{1}{15}$.

Câu 38. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{2x+1}$ là

A. $-\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}+C$.

B. $\frac{2}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}+C$.

C. $\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}+C$.

D. $\frac{1}{2}\sqrt{2x+1}+C$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Hoàng Hải; Fb: Nguyễn Hoàng Hải

Chọn C

Ta đặt $I=\int\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x$; đặt $t=\sqrt{2x+1}\Rightarrow t^2=2x+1\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$

Nên $I=\int t^2\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}+C$

Vậy $I=\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}+C$.

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=x^3+mx-\frac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. 12. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Tác giả: Ngô Thị Oanh; Fb: Oanh Ngô.

Chọn D

Để hàm số $y=x^3+mx-\frac{1}{5x^5}$ đồng biến trên $(0;+\infty)\Leftrightarrow y'\ge 0\ \forall x\in(0;+\infty)$ và $y'=0$ tại một số hữu hạn điểm

$\Leftrightarrow 3x^2+m+\frac{1}{x^6}\ge 0\ \ \forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow 3x^2+\frac{1}{x^6}\ge -m\ \ \forall x\in(0;+\infty)$

Xét hàm số $f(x)=3x^2+\frac{1}{x^6}$ trên $(0;+\infty)$.

$f'(x)=6x-\frac{6}{x^7}=\frac{6(x^8-1)}{x^7}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\ \text{(TM)}\\ x=-1\ \text{(KTM)}\end{array}\right.$

BBT

x	0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

YCBT $\Leftrightarrow -m \le 4 \Leftrightarrow m \ge -4$. Mà m là số nguyên âm $\Rightarrow m \in \{-4;-3;-2;-1\}$.

Vậy có 4 giá trị của m thỏa mãn.

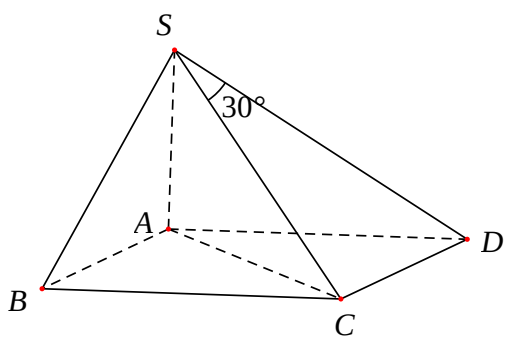
Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và đường thẳng SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc $30°$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\sqrt{3}a^3$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{2a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{6}a^3}{3}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Hồng Nhung; Fb: Nguyễn Thị Hồng Nhung

Chọn D



Ta có

$$\left.\begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$$

Và $(SC, (SAB)) = (SC, SB) = CSB = 30°$.

Tam giác SBC vuông tại B và $CSB = 30°$ nên $SB = \dfrac{BC}{\tan 30°} = 3a$.

Tam giác SAB vuông tại A nên $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = 2a\sqrt{2}$.

Vậy thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3}.AB.BC.SA = \dfrac{2a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 41. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng (P), (P') chứa d và tiếp xúc với (S) tại T, T'. Tìm toạ độ trung điểm H của TT'.

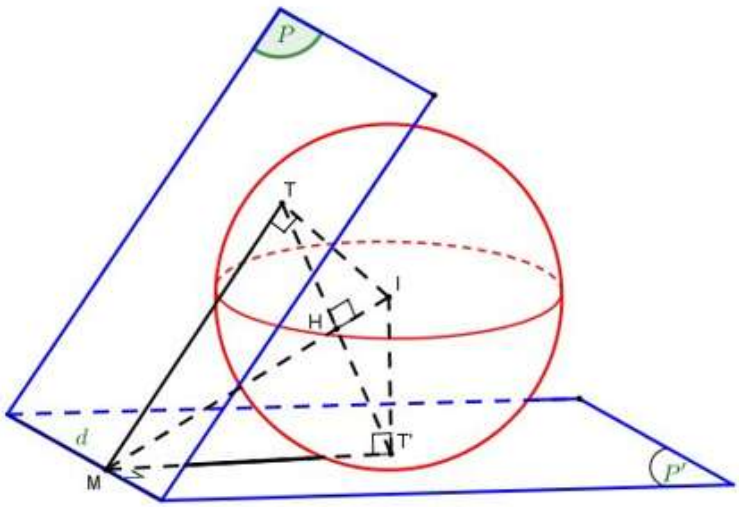
A. $H\left(\frac{5}{6};\frac{2}{3};-\frac{7}{6}\right)$. **B.** $H\left(-\frac{7}{6};\frac{1}{3};\frac{7}{6}\right)$. **C.** $H\left(\frac{5}{6};\frac{1}{3};-\frac{5}{6}\right)$. **D.** $H\left(-\frac{5}{6};\frac{1}{3};\frac{5}{6}\right)$

.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Tuân; Fb: Nguyễn Tuân

Chọn C



+ Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-1)$ và có bán kính $R=1$.

+ Gọi M là hình chiếu của I trên d. Suy ra: $M(t;2+t;-t)\in d$.

Ta có: $\overrightarrow{IM}(t-1;t+2;-t+1)$ và $\overrightarrow{u_d}(1;1;-1)$ là vectơ chỉ phương của d.

Suy ra: $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{u_d}=0 \Leftrightarrow t-1+t+2+t-1=0 \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow M(0;2;0)$.

+ Ta có: $IM=\sqrt{6}$, $IH.IM=IT^2=1 \Rightarrow IH=\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Suy ra: $\overrightarrow{IH}=\frac{1}{6}\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H-1=-\frac{1}{6} \\ y_H-0=\frac{1}{6}.2 \\ z_H+1=\frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H=\frac{5}{6} \\ y_H=\frac{1}{3} \\ z_H=-\frac{5}{6} \end{cases}$. Vậy $H\left(\frac{5}{6};\frac{1}{3};-\frac{5}{6}\right)$.

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4-2mx^2+(2m-1)=0$ có 4 nghiệm thực phân biệt là:

A. $(1;+\infty)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{1\}$. **C.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Tác giả: Phan Thanh Quỳnh; Fb:Thanh Quynh Phan

Chọn B

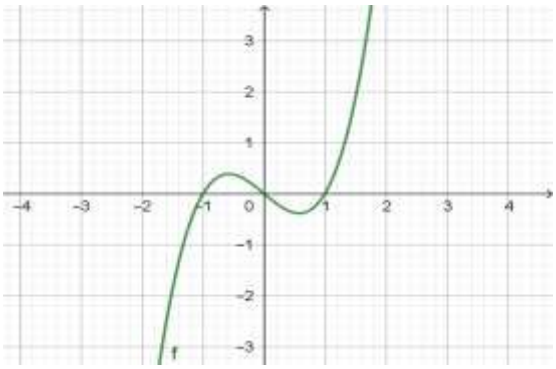
Đặt $t=x^2\ge 0$, khi đó phương trình đã cho trở thành:

$t^2-2mt+(2m-1)=0\Leftrightarrow(t-1)(t-2m+1)=0\quad(1)$

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình (1) có 2 nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow$ $t=2m-1$ phải dương và khác 1 $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2}<m\ne 1$.

Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại mọi $x\in\mathbb{R}$, hàm số $y=f'(x)=x^3+ax^2+bx+c$ có độ thị như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left[f'(x)\right]$ là

A. 8. **B.** 11. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Trung Kiên – Nguyễn Văn Xuất

Chọn C

Do đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại các điểm $-1;0;1$.

$y=f'(x)=x^3+ax^2+bx+c=(x+1)x(x-1)=x^3-x$

$f''(x)=3x^2-1;$

$y=f\left[f'(x)\right]$ có $y'=f'\left[f'(x)\right].f''(x)$

$$y'=0 \Leftrightarrow f'\left[f'(x)\right].f''(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'\left[f'(x)\right]=0 \\ f''(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=-1 \\ f'(x)=0 \\ f'(x)=1 \\ f''(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_0<-1 \\ x=0;\pm 1 \\ x=x_1>1 \\ x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$$

Vậy hàm số $y=f\left[f'(x)\right]$ có 7 điểm cực trị.

Câu 44. Bất phương trình $\dfrac{\sqrt{2+3^{2x}}}{\sqrt{2+3^{2x}}-\sqrt{2-3^{2x}}}+\dfrac{3^{4x}+\sqrt{4-3^{4x}}-7}{3^{2x}} \geq \dfrac{3^{2x}-2}{\sqrt{4-3^{4x}}-2+3^{2x}}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3. **B.** 2. **C.** Vô số. **D.** 1.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Uyên; Fb: Uyen Nguyen

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases} 2-3^{2x}\geq 0 \\ 4-3^{4x}\geq 0 \\ \sqrt{4-3^{4x}}-2+3^{2x}\neq 0 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{2+3^{2x}} \\ b=\sqrt{2-3^{2x}} \end{cases}$, $a>\sqrt{2}$, $0\leq b<\sqrt{2}$. Khi đó $\begin{cases} a^2-b^2=2.3^{2x}>0 \\ a^2+b^2=4 \\ ab=\sqrt{4-3^{4x}} \end{cases}$.

Bất phương trình trở thành: $\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{4-a^2b^2+ab-7}{\dfrac{a^2-b^2}{2}} \geq \dfrac{-b^2}{ab-b^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a-b}+\frac{2\left(-a^2b^2+ab-3\right)}{a^2-b^2} \geq \frac{-b}{a-b} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a-b}+\frac{2\left(-a^2b^2+ab-3\right)}{a^2-b^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2+2\left(-a^2b^2+ab-3\right)\geq 0 \Leftrightarrow -2a^2b^2+4ab-6+a^2+b^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow -2a^2b^2+4ab-2\geq 0 \Leftrightarrow -2(ab-1)^2\geq 0 \Leftrightarrow ab=1.$$

Với $ab=1 \Rightarrow \sqrt{4-3^{4x}}=1 \Leftrightarrow 3^{4x}=3 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$ (tmđk).

Vậy bất phương trình có 1 nghiệm $x=\dfrac{1}{4}$.

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z+1=0$ và hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(2;1;1)$. Mặt phẳng (Q) chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng (P), mặt phẳng (Q) có phương trình là

A. $-x+y=0$.

B. $3x-2y-z-3=0$.

C. $3x-2y-z-3=0$.

D. $x+y+z-2=0$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Trung Hiếu; Fb: Hieu nguyen

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;2;-1)$, mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;1;1)$ mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{(Q)}}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_{(P)}}\right]=(3;-2;-1)$.

Lại có (Q) đi qua $A(1;-1;2)$ nên (Q) có phương trình

$(Q): 3(x-1)-2(y+1)-1(z-2)=0 \Leftrightarrow 3x-2y-z-3=0$.

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị
nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị?

A. 6.

B. 5.

C. 0.

D. 7.

Lời giải

Tác giả: Kiều Thị Thúy; Fb: Thúy Kiều

Chọn A

Để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị thì $f'(x)$ đổi dấu đúng một lần.

Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x=-1 \\ x^2+2mx+5=0 \end{array}\right.$

Đặt $g(x)=x^2+2mx+5$. Để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị xảy ra các khả năng sau:

+) TH1: $g(x)=0$ có nghiệm kép, điều kiện là $\Delta'=m^2-5=0 \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{5}$ không thỏa mãn m nguyên.

+) TH2: $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm bằng 0 (không thể xảy ra) hoặc có một nghiệm bằng -1. TH này xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ g(-1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2>5\\ m=3\end{cases} \Leftrightarrow m=3.$

+) TH3: $g(x)=0$ vô nghiệm tức $\Delta'<0 \Leftrightarrow m^2-5<0 \Leftrightarrow -\sqrt{5}<m<\sqrt{5}$, do m nguyên nên $m\in\{-2;-1;0;1;2\}$: có 5 giá trị của m. Vậy có 6 giá trị m nguyên thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 47. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

A. $V=\dfrac{\pi a^2h}{3}$. **B.** $V=3\pi a^2h$. **C.** $V=\dfrac{\pi a^2h}{9}$. **D.** $V=\pi a^2h$.

Lời giải

Tác giả: Lê Phương; Fb:lephuongtt1

Chọn A

Đáy của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là hình tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh a.

Chiều cao của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là chiều cao h của lăng trụ $ABC.A'B'C'$

Diện tích đáy bằng của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $\pi\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2=\dfrac{\pi a^2}{3}$.

Do đó thể tích V của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho là $V=\dfrac{\pi a^2h}{3}$.

Câu 48. Cho $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=2$, khi đó $I=\int\limits_1^4 \dfrac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Liêu; Fb: Nguyen Lieu

Chọn B

Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Đổi cận: Với $x=1\Rightarrow t=1$; với $x=4\Rightarrow t=2$.

Khi đó, $I = 2\int_1^2 f(t)\mathrm{d}t = 2\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 4$.

Câu 49. Mệnh đề nào dưới đây **SAI**?

A. Hai khối hộp chữ nhật có diện tích toàn phần bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.

B. Hai khối chóp có diện tích đáy và chiều cao tương ứng bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.

C. Hai khối lập phương có diện tích toàn phần bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.

D. Hai khối lăng trụ có diện tích đáy và chiều cao tương ứng bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.

Lời giải

Tác giả: Lê Phương; Fb: lephuongtt1

Chọn A

Các mệnh đề **B, C, D** hiển nhiên đúng, mệnh đề **A** sai.

Câu 50. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận ngang?

A. $y = \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$. **B.** $y = \dfrac{3x^2+2x-1}{4x^2+5}$. **C.** $y = x^3 - x - 1$. **D.** $y = \sqrt{2x^2+3}$

.

Lời giải

Tác giả: Hàng Quốc Huy; Fb: Quốc Huy Hàng

Chọn B

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2+2x-1}{4x^2+5} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{4+\frac{5}{x^2}} = \frac{3}{4}.$$

HẾT